

Analys I, Hemuppgifter 4, 8.10.2014

1. Låt $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$ med jämnt gradtal m . Visa, att om $a_m a_0 < 0$, så har polynomet $p(x)$ minst två nollställen.

2. Visa att Axiom (C) följer ur följande antagande (S):

"Om mängden S är uppåt begränsad och icke-tom, så existerar $\sup S$."

Axiom (C) skulle alltså kunna bytas ut mot Axiomet (S).

3. Funktionen f har egenskapen att det finns ett tal k , $0 < k < 1$, sådant att

$$kx^2 < f(x) < x^2 \quad \text{för alla } x > 1.$$

Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x^3}.$$

4. Visa att för $0 < a < 1$ gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. Visa sedan också att $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$.

5. Undersök för $k = 2, 3, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^k}\right)^n,$$

samt för $a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^n.$$

6. Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är subadditiv, dvs.

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{för varje } x, y \in \mathbb{R}.$$

Visa att om $f(0) = 0$ och om f är kontinuerlig i 0, så är f kontinuerlig.