

Analys I, Hemuppgifter 2, 24.9.2014

1. Visa att

a) om $|a - 1| < 1$ och $|b - 1| < 1$, så är $|ab - 1| < 3$.

b) om $|x - 2| < 1$ och $|y - 1| < 1$, så är $|x^2 + xy - 6| < 9$.

2. Visa att

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$ samt resonera härav att $x \mapsto \sin x$ är kontinuerlig.

3. Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är diskontinuerlig i varje punkt men vars beloppfunktion $|f|$ definierad genom $|f|(x) = |f(x)|$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

4. Sätt $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$. Bestäm $\delta > 0$, så att

$$|x - y| < \delta, x, y \geq 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 10^{-3}.$$

5. Antag att funktionen f är kontinuerlig i 0 och att $f(0) \neq 0$. Visa att det finns $\delta > 0$ och $m > 0$ så att

$$|x| < \delta, x \in D_f \Rightarrow |f(x)| > m.$$

6. Undersök om funktionen $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ har ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$.

7. Antag att (x_n) är en talföljd som konvergerar mot punkten x_0 . Antag vidare att f och g är funktioner som är definierade i en omgivning kring x_0 med $f(x_n) = g(x_n)$ för all $n \in \mathbb{N}$. Är det sant att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L, \text{ om } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Motivera!