Analys I, Hemuppgifter 1, 10.9.2014

1. Visa att $\sqrt{n}$ är ett irrationellt tal förutsatt att $n \in \mathbb{N}$ inte är en jämn kvadrat. Bevisa också att $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ är ett irrationellt tal för varje tal $n \in \mathbb{N}$.

2. Bevisa, med hjälp av ordningsaxiomet, att följande gäller: om $x < y$ och $z < 0$ så är $xz < yz$.

3. Bevisa med induktion binomialsatsen:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n.$$

4. Visa, att $(1+a)^n \geq 1 + na$ för $a \geq 0$ och $n \in \mathbb{N}$.

5. Bevisa genom induktion följande formler

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. Antag att att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har följande egenskap för alla $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Visa att

(a) $f(\frac{1}{q}x) = \frac{1}{q}f(x)$ för varje $x \in \mathbb{R}$ och $q \in \mathbb{N}$.

(b) $f(rx) = rf(x)$ för varje $x \in \mathbb{R}$ och $r \in \mathbb{Q}^+$.

7. Beräkna $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} ik$ och bestäm antalet termer i summan $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} x_{ijk}$.