

3. Booleska algebror och Karnaugh-avbildningar

Vi skall nu generalisera ordningsrelationen $\leq$ på $\mathbf{R}$ och inklusion $\subseteq$ för mängder. Först studeras allmänt partiella ordningar, därefter latticar och Booleska algebror.

Partiella ordningar

Definition. En relation R på en mängd X kallas en partiell ordning på X om den är

- (i) reflexiv, $a R a$ för alla $a \in X$;
- (ii) antisymmetrisk, $a R b$ och $b R a \Rightarrow a = b$;
- (iii) transitiv, $a R b$ och $b R c \Rightarrow a R c$.

Anmärkning. Istället för $a R b$ skriver vi $a \leq b$. Således kommer vi att använda symbolen $\leq$ för många olika partiella ordningar, på olika mängder. Vi säger att X är en **partiellt ordnad mängd** om det finns en partiell ordning på X , och betecknar den partiellt ordnade mängden med $(X, \leq)$.

Exempel. a) Låt Y vara en mängd. Sätt $X = P(Y) = \{\text{alla delmängder till } Y\}$. Då kallas $P(Y)$ **potensmängden** till Y . Inklusionen $\subseteq$ är en partiell ordning på $P(Y)$, (verifiera!). Således är $(P(Y), \subseteq)$ en partiellt ordnad mängd.

b) Beteckna $\mathbf{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$. Låt $|$ betyda delar:

$$x|y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \text{ är ett heltal.}$$

Då är $|$ en partiell ordning på $\mathbf{Z}_+$. (Kolla!).

c) Relationen $<$ på $\mathbf{Z}_+$ är inte en partiell ordning, ty den är inte reflexiv.

Definition. Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. Om $a \leq b$ eller $b \leq a$ gäller för alla $a, b \in X$, så säger vi att $(X, \leq)$ är totalt ordnad. Om $a \leq b$ och $a \neq b$, så skriver vi $a < b$.

Exempel. a) Klart att $(\mathbf{R}, \leq)$ är totalt ordnad.

b) $(\mathbf{Z}_+, |)$ är inte totalt ordnad, exempelvis gäller $2 \nmid 7$ och $7 \nmid 2$.

c) $(P(X), \subseteq)$ är inte totalt ordnad. Betrakta disjunkta mängder.

Definition. Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. Tag $b \in X$. Vi säger att b täcker $a \in X$ om $a < b$ och det inte finns något $c \in X$ sådant att $a < c < b$.

Det finns många sätt att definiera en partiell ordning på produkten av givna partiellt ordnade mängder. Vi behandlar två sätt:

Produktordningen: Antag att $(X, \leq_1)$ och $(Y, \leq_2)$ är partiellt ordnade mängder. Då är $(X \times Y, \leq)$ en partiellt ordnad mängd med den partiella ordningen $\leq$ definierad genom

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ om } x \leq_1 x' \text{ och } y \leq_2 y'.$$

Det är lätt att visa att $(X \times Y, \leq)$ är en partiellt ordnad mängd.

Lexikografiska ordningen: Antag att $(X, \leq)$ och $(Y, \leq)$ är partiellt ordnade mängder. Då är $(X \times Y, \prec)$ en partiellt ordnad mängd med den partiella ordningen $\prec$ definierad genom

$$(x, y) \prec (x', y') \text{ om } x < x' \text{ eller om } x = x' \text{ och } y \leq y'.$$

Ordningen av elementen domineras av den första koordinaten; endast då $x = x'$ fäster vi vikt vid den andra koordinaten.

Om $(X, \leq)$ och $(Y, \leq)$ är totalt ordnade mängder, så är också den lexikografiska ordningen $\prec$ på $X \times Y$ totalt ordnad.

Den lexikografiska ordningen kan utsträckas till produkter $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ på följande sätt:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) \prec (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ om} \\ x_1 < x'_1 \text{ eller} \\ x_1 = x'_1 \text{ och } x_2 < x'_2 \text{ eller} \\ x_1 = x'_1, x_2 = x'_2 \text{ och } x_3 < x'_3 \text{ eller} \\ \vdots \\ x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_{n-1} = x'_{n-1} \text{ och } x_n < x'_n. \end{aligned}$$

Exempel. Låt $X = \{a, b, \dots, \ddot{o}\}$ vara det vanliga alfabetet, som är totalt ordnad på vanligt sätt $a \leq b, b \leq c, \dots, \ddot{a} \leq \ddot{o}$. Då kan produkten $X^n = X \times X \times \dots \times X$ identifieras med alla ord av längden n .

Den lexikografiska ordningen på X^n har egenskapen att om $o_1 \prec o_2, o_1 \neq o_2, o_1, o_2 \in X^n$, så skulle o_1 finnas före o_2 i en alfabetisk lista. Alltså hoppa $\prec$ loppa, ty $h < l$. Vidare gäller spark $\prec$ sparv, ty $s = s, p = p, a = a, r = r$ och $k < v$.

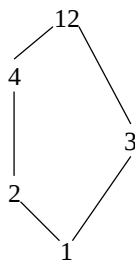
Om $(X, \leq)$ är en partiellt ordnad mängd och X är **ändlig**, så finns det två sätt att representera $(X, \leq)$:

(I) Hasse-diagram:

Ett **Hasse-diagram** av en ändlig partiellt ordnad mängd är en riktad graf vars noder är element i X och det finns en riktad pil från a till b då b täcker a i X . Istället för att rita en pil från a till b , så sammanbinder vi a och b med en linje så att b ligger högre än a . (Hasse-diagram introducerades 1926 av den tyska matematikern Helmut Hasse, 1898–1979).

Exempel. (Hasse-diagram)

a) Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 12\}$. Betrakta $|$ på X , dvs. $\forall a, b \in X: a \leq b \Leftrightarrow a|b$. Hasse-diagrammet för $(X, \leq)$ (eller $(X, |)$) ges av:



Figur 1.

$$1 \leq 2 \leq 4 \leq 12,$$

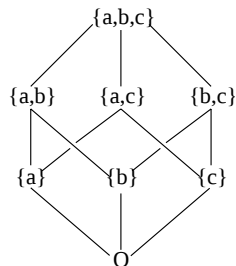
$$1 \leq 3 \leq 12,$$

$$(2 \nmid 3, 3 \nmid 4)$$

b) Potensmängden $P(\{a, b, c\})$ med $\subseteq$, $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$:

$$X = P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Hasse-diagram för $(X, \subseteq)$:



Figur 2.

(II) Matrisrepresentation (täckningsmatris):

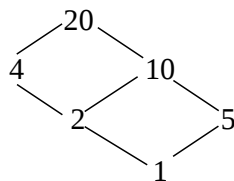
Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och $X = \{a_1, \dots, a_n\}$. Då definieras täckningsmatrisen $M = (b_{ij})$ genom

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om } a_i \text{ täcker } a_j; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Exempel. Bestäm Hasse-diagram och täckningsmatris till $(\{a \in \mathbf{Z}_+ : a|20\}, |)$.

$$20 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5, X = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Hasse-diagrammet:



Figur 3.

Täckningsmatrisen:

	1	2	4	5	10	20
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0
10	0	1	0	1	0	0
20	0	0	1	0	1	0

Definition. Låt $(X, \leq)$ och $(Y, \leq')$ vara partiellt ordnade mängder, samt antag att $f : X \rightarrow Y$ är en bijektion. Då kallas f en isomorfism från $(X, \leq)$ till $(Y, \leq')$ om för varje $a, b \in X$ gäller att

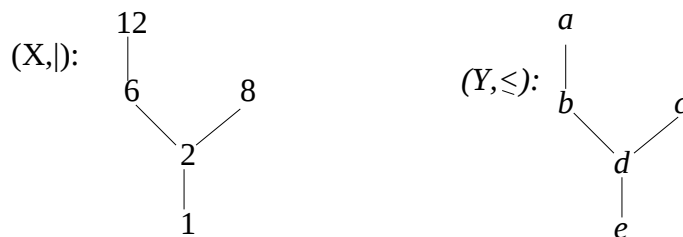
$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq' f(b).$$

Härvid säges $(X, \leq)$ och $(Y, \leq')$ vara isomorfa, vilket betecknas $(X, \leq) \cong (Y, \leq')$.

Exempel. Betrakta den partiellt ordnade mängden $(X, |)$, där $X = \{1, 2, 6, 8, 12\}$, och antag att $(X, |)$ är isomorf med $(Y, \leq)$, där $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Låt bijektionen $f : X \rightarrow Y$ definiera isomorfismen och antag att

$$f(1) = e, f(2) = d, f(6) = b, f(8) = c \text{ och } f(12) = a.$$

Isomorfismen bevarar den partiella ordningen av X . Således kan avbildningen betraktas som en “ny namngivning” av noderna i Hasse-diagrammet för $(X, |)$. Vi har då följande Hasse-diagram för $(X, |)$ och $(Y, \leq)$:

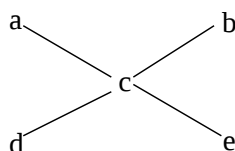


Figur 4.

Definition. Antag att $(X, \leq)$ är partiellt ordnad. Då är $a \in X$ maximalt, om det inte existerar $c \in X$ med $a < c$. Vidare är $b \in X$ minimalt, om det inte existerar $c \in X$ med $c < b$. Elementet $a \in X$ är ett största element i X om $x \leq a$ för alla $x \in X$, och elementet $b \in X$ är ett minsta element i X om $b \leq x$ för alla $x \in X$.

Anmärkning. Det gäller alltid att om det existerar ett största element, så är det maximalt och om det existerar ett minsta element så är det ett minimalt element.

Exempel. a) Låt $(\{a, b, c, d, e\}, \leq)$ ha Hasse-diagrammet:



Figur 5.

Största och minsta element saknas. a, b är maximala element och d, e är minimala element.

b) $((0, 1), \leq)$, Inga maximala eller minimala element.

c) $([0, 1], \leq)$, 1 maximalt och största element, 0 minimalt och minsta element.

Lemma 36. Låt $(X, \leq)$ vara en ändlig partiellt ordnad mängd. Då finns det minst ett minimalt element i X och minst ett maximalt element i X .

Bevis: Tag ett godtyckligt element $a \in X$. Om a inte är maximalt så kan vi hitta $a_1 \in X$ med $a < a_1$. Om a_1 inte är maximalt kan vi hitta $a_2 \in X$ med $a_1 < a_2$. Då X är en ändlig mängd, kommer vi slutligen att erhålla en ändlig följd

$$a < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k,$$

som inte kan fortsättas. Således är a_k ett maximalt element i $(X, \leq)$. Analogt visas att $(X, \leq)$ har åtminstone ett minimalt element. $\square$

Lemma 37. En partiellt ordnad mängd $(X, \leq)$ har högst ett största och högst ett minsta element.

Bevis: Antag att a och b är största element i X . Emedan a är största element i X , så är $b \leq a$. På motsvarande sätt fås att $a \leq b$. Således är $a = b$ enligt antisymmetriegenskapen. På analogt sätt visas att $(X, \leq)$ har högst ett minsta element. $\square$

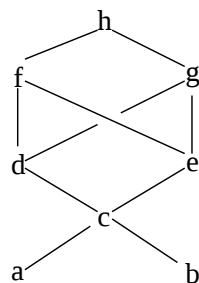
Definition. Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt Y vara en delmängd av X . Ett element $a \in X$

kallas en majorant av Y , om $b \leq a$ för alla $b \in Y$. Ett element $a \in X$ kallas en minorant av Y , om $a \leq b$ för alla $b \in Y$.

Exempel. 1) Betrakta $(\mathbf{R}, \leq)$ och $Y = (0, 1]$.

$$\begin{aligned}\{\text{majoranter till } Y\} &= [1, \infty), \\ \{\text{minoranter till } Y\} &= (-\infty, 0].\end{aligned}$$

2) Betrakta $(X, \leq)$, $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ med Hasse-diagrammet:



Figur 6.

Bestäm alla majoranter och minoranter till a) $Y_1 = \{a, b\}$, b) $Y_2 = \{c, d, e\}$.

- a) Y_1 saknar minoranter. Majoranter till Y_1 : c, d, e, f, g och h .
b) Minoranter till Y_2 : a, b, c . Majoranter till Y_2 : f, g, h .

Definition. Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt $Y \subseteq X$. Ett element $a \in X$ kallas ett supremum till Y , betecknat $\sup Y$, om a är en majorant till Y och $a \leq a'$ för alla majoranter a' till Y . Ett element $a \in X$ kallas ett infimum till Y , betecknat $\inf Y$, om a är en minorant till Y och $a' \leq a$ för alla minoranter a' till Y .

Exempel. Fortsättning på föregående exempel.

- 1) $\sup Y = 1 \in Y$ och $\inf Y = 0 \notin Y$
2) a) $\sup Y_1 = c$ och $\inf Y_1$ saknas.
b) $\inf Y_2 = c$. Supremum till Y_2 saknas, ty f och g inte kan jämföras och $f < h, g < h$.

Lemma 38. Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. Då har en delmängd Y av X högst ett $\inf Y$ och högst ett $\sup Y$.

Bevis: Hemuppgift.

Lattice

Definition. En partiellt ordnad mängd $(X, \leq)$ är ett lattice, om det för varje delmängd $\{a, b\}$ som består av två element gäller att $\sup\{a, b\}$ och $\inf\{a, b\}$ existerar. Vi betecknar $\sup\{a, b\}$ med $a \vee b$ och $\inf\{a, b\}$ med $a \wedge b$.

Exempel. a) Betrakta $(P(X), \subseteq)$. Tag godtyckligt $A, B \in P(X)$. Då gäller: $(A \subseteq C \text{ och } B \subseteq C) \Leftrightarrow C \in \{D \in P(X) : A \cup B \subseteq D\} = \text{”mängden av majoranter till } \{A, B\}$ ”. Alltså gäller

$$A \vee B = \sup(\{A, B\}) = A \cup B.$$

Vidare har vi att $(C \subseteq A \text{ och } C \subseteq B) \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \in P(A \cap B) = \text{”mängden av minoranter till } \{A, B\}$ ”. Därmed gäller

$$A \wedge B = \inf(\{A, B\}) = A \cap B,$$

och $(P(X), \subseteq)$ är ett lattice.

b) Betrakta $(\mathbf{Z}_+, |)$. Antag att $a, b \in \mathbf{Z}_+$ och beteckna med $\text{mgm}(a, b)$ och $\text{sgd}(a, b)$ minsta gemensamma multipeln respektive största gemensamma delaren till a och b . Härvid är $g = \text{sgd}(a, b)$ om

- (i) $g|a$ och $g|b$, dvs. g är en minorant till $\{a, b\}$ och
- (ii) $(c \in \mathbf{Z}_+, c|a \text{ och } c|b) \Rightarrow c|g$, dvs. g är den största minoranten till $\{a, b\}$.

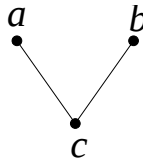
Alltså är $a \wedge b = \text{sgd}(a, b)$. Vidare är $h = \text{mgm}(a, b)$ om

- (i) $a|h$ och $b|h$, dvs. h är en majorant till $\{a, b\}$ och
- (ii) $(c \in \mathbf{Z}_+, a|c \text{ och } b|c) \Rightarrow h|c$, dvs. h är den minsta majoranten till $\{a, b\}$.

Då är $a \vee b = \text{mgm}(a, b)$, och $(\mathbf{Z}_+, |)$ är ett lattice.

c) Betrakta $(\mathbf{R}, \leq)$. Då är $a \wedge b = \min(a, b)$ och $a \vee b = \max(a, b)$ för alla $a, b \in \mathbf{R}$, och $(\mathbf{R}, \leq)$ är ett lattice.

d) Låt $(\{a, b, c\}, \leq)$ definieras av Hasse-diagrammet:



Figur 7.

Då är $a \wedge b = c$, $a \wedge c = c$, $c \wedge b = c$, $a \vee c = a$, $c \vee b = b$. Men $a \vee b$ saknas. Då är $(\{a, b, c\}, \leq)$ inte ett lattice.

Låt oss nu studera möjliga latticestrukturer för mängder med tre element, $X = \{a, b, c\}$. Antag att $(X, \leq)$ är ett lattice.

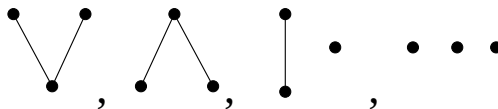
Vi bildar $a \wedge (b \wedge c)$ och får ett element z som uppfyller $z \leq a$ och $z \leq b \wedge c$, varför $z \leq a$, $z \leq b$ och $z \leq c$. Därmed är z det minsta elementet i $(X, \leq)$.

Med ett dualt resonemang ser vi att det också måste finnas ett största element i $(X, \leq)$. Det tredje elementet ligger därför mellan det största och det minsta, varför Hasse-diagrammet måste vara av formen:



Figur 8.

Ett lattice med tre element är då alltid en totalt ordnad mängd. Hasse-diagram av andra typer, med tre element, ger alltså partiellt ordnade mängder som inte är latticestrukturer:



Figur 9.

Sats 39. Om $(X, \leq_1)$ och $(Y, \leq_2)$ är lattice, så är $(X \times Y, \leq)$ med produktordningen ett lattice.

Bevis: Låt $\vee_1$ och $\wedge_1$ beteckna supremum resp. infimum i X , samt $\vee_2$ och $\wedge_2$ supremum resp. infimum i Y . För (x_1, y_1) och (x_2, y_2) tillhörande $X \times Y$ bör vi visa att följande formler gäller:

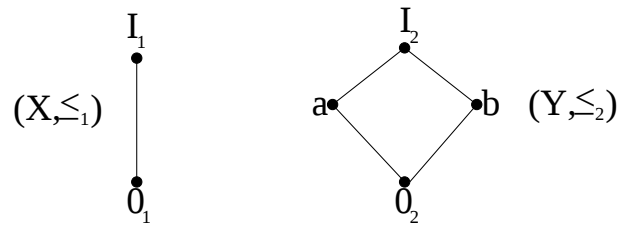
$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) &= (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2), \\ (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) &= (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2). \end{aligned} \quad (*)$$

Antag att $S_1 = x_1 \vee_1 x_2$ och $S_2 = y_1 \vee_2 y_2$. Då gäller det att $(S_1, S_2) \in X \times Y$. Nu har vi att $(x_i \leq_1 S_1$ och $y_i \leq_2 S_2, i = 1, 2) \Rightarrow (x_i, y_i) \leq (S_1, S_2), i = 1, 2$. Alltså är (S_1, S_2) en majorant till $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Vidare gäller, för godtyckligt vald majorant (z_1, z_2) :

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \leq (z_1, z_2) &\Rightarrow x_1 \leq_1 z_1 \text{ och } y_1 \leq_2 z_2, \\ (x_2, y_2) \leq (z_1, z_2) &\Rightarrow x_2 \leq_1 z_1 \text{ och } y_2 \leq_2 z_2, \end{aligned}$$

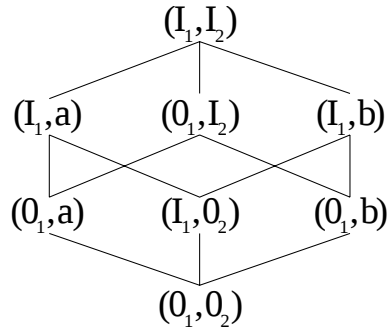
ur vilket följer att $S_1 = x_1 \vee_1 x_2 \leq_1 z_1$ och $S_2 = y_1 \vee_2 y_2 \leq_2 z_2$. Detta i sin tur innebär att $(S_1, S_2) \leq (z_1, z_2)$, så vi har att $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (S_1, S_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$, och den första formeln i $(*)$ gäller. Den andra formeln visas analogt. Därmed är $(X \times Y, \leq)$ med produktordningen ett lattice. $\square$

Exempel. Betrakta följande två lattice:



Figur 10.

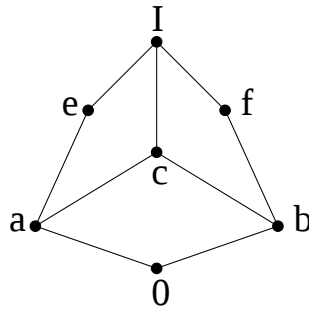
Då är $(X \times Y, \leq)$ givet av:



Figur 11.

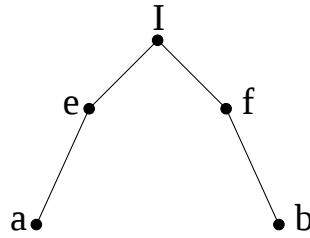
Definition. Låt $(X, \leq)$ vara ett lattice. En icke-tom delmängd Y av X kallas ett underlattice (dellattice) av X om $a \vee b \in Y$ och $a \wedge b \in Y$ gäller för alla $a, b \in Y$.

Exempel. Betrakta latticet $(L, \leq)$:



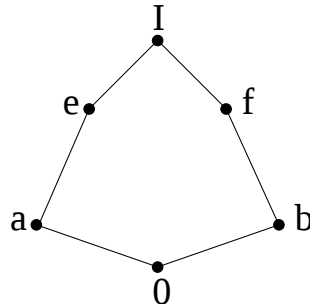
Figur 12.

Då är $(X_1, \leq)$



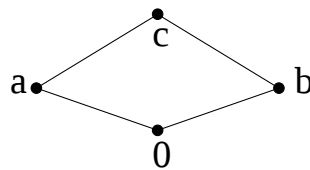
Figur 13. $(X_1, \leq)$

inte ett underlattice till $(L, \leq)$, ty $a \wedge b = 0 \notin X_1$. Vidare är $(X_2, \leq)$



Figur 14. $(X_2, \leq)$

inte ett underlattice till $(L, \leq)$, ty $a \vee b = c \notin X_2$. (Som fristående partiell ordning är $(X_2, \leq)$ ett lattice). Dock är $(X_3, \leq)$



Figur 15. $(X_3, \leq)$

ett underlattice till $(L, \leq)$

Vi skall nu bevisa några elementära egenskaper hos latticestrukturer.

Sats 40. Låt $(X, \leq)$ vara ett lattice. Då gäller för alla $a, b \in X$:

- i) $a \vee b = b \Leftrightarrow a \leq b$,
- ii) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b$,
- iii) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Bevis: a) Antag att $a \vee b = b$. Då $a \leq a \vee b = b$, fås $a \leq b$. Omvänt, om $a \leq b$, så fås emedan $b \leq b$, att $a \vee b \leq b$. Då $a \vee b$ är en majorant gäller $b \leq a \vee b$, varför $a \vee b = b$. b) visas analogt och c) följer ur a) och b). $\square$

Exempel. Låt $(X, \leq)$ vara totalt ordnad. Om $a, b \in X$, så är $a \leq b$ eller $b \leq a$. Då är det klart att för varje par av element existerar supremum och infimum. Alltså $(X, \leq)$ är ett lattice.

Sats 41. Låt $(X, \leq)$ vara ett lattice. Då gäller för alla $a, b, c \in X$:

- (i) $a \vee a = a$ och $a \wedge a = a$, (idempotens),
- (ii) $a \vee b = b \vee a$ och $a \wedge b = b \wedge a$, ($\vee, \wedge$ kommuterar),
- (iii) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ och $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, (associativitet),
- (iv) $a \vee (a \wedge b) = a$ och $a \wedge (a \vee b) = a$, (absorptionslagarna).

Bevis: (i) Följer ur Sats 40 i) och ii) med $b = a$.

(ii) Vi har att $a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$ och $a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$.

(iii) Sätt $u_1 = a \vee (b \vee c)$ och $u_2 = (a \vee b) \vee c$. Nu gäller att

$$(a \leq u_1 \text{ och } b \vee c \leq u_1) \Rightarrow a \leq u_1, b \leq u_1, c \leq u_1,$$

så u_1 är majorant till mängden $\{a, b, c\}$. Vidare gäller, för godtycklig majorant v till $\{a, b, c\}$

$$(a \leq v, b \leq v, c \leq v) \Rightarrow a \leq v \text{ och } b \vee c \leq v \Rightarrow u_1 = a \vee (b \vee c) \leq v.$$

Alltså är $u_1 = \sup\{a, b, c\}$. Likadant visas att $u_2 = \sup\{a, b, c\}$. Enligt Lemma 38 existerar det högst ett supremum, så $u_1 = u_2$ gäller, vilket ger den första likheten i påståendet. Den andra likheten visas analogt.

(iv) Vi har att $(a \wedge b \leq a \text{ och } a \leq a) \Rightarrow a \vee (a \wedge b) \leq a$, samt att $a \leq a \vee (a \wedge b)$. Då ger antisymmetrin att $a = a \vee (a \wedge b)$. Den andra likheten visas analogt. $\square$

Det följer ur egenskap (iii) i Sats 41 att vi kan skriva $a \vee (b \vee c)$ och $(a \vee b) \vee c$ som $a \vee b \vee c$, samt analogt för $a \wedge b \wedge c$. Man kan visa med induktion att vi kan skriva

$$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Sats 42. Låt $(X, \leq)$ vara ett lattice. Då gäller för alla $a, b, c \in X$:

- (i) Om $a \leq b$, så är $a \vee c \leq b \vee c$ och $a \wedge c \leq b \wedge c$,
- (ii) $a \leq c$ och $b \leq c \Leftrightarrow a \vee b \leq c$,
- (iii) $c \leq a$ och $c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \wedge b$,
- (iv) Om $a \leq b$ och $c \leq d$, så är $a \vee c \leq b \vee d$ och $a \wedge c \leq b \wedge d$.

Bevis: Hemuppgift.

Speciella typer av lattice

Definition. Ett lattice $(X, \leq)$ kallas begränsat, om det har ett största element $I \in X$, (kallas etta), och ett minsta element $0 \in X$, (kallas nolla).

Exempel. a) För latticet $(P(X), \subseteq)$ är $I = X$ och $0 = \emptyset$.

b) För latticet $(\mathbf{Z}_+, |)$ är $0 = 1$ och största element I saknas.

Om $(X, \leq)$ är ett begränsat lattice, så gäller för alla $a \in X$:

$$0 \leq a \leq I,$$

$$a \vee 0 = a \quad \text{och} \quad a \wedge 0 = 0,$$

$$a \vee I = I \quad \text{och} \quad a \wedge I = a.$$

Om $(X, \leq)$ är ett lattice och X är en oändlig mängd, så behöver största och minsta element inte existera. Betrakta exempelvis $(\mathbf{R}, \leq)$, där $\mathbf{R}$ är mängden av reella tal med den vanliga ordningsrelationen.

Sats 43. Låt $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara ett ändligt lattice. Då är X begränsat.

Bevis: Det största elementet i X är $I = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ och det minsta elementet i X är $0 = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$.

□

I fortsättningen betecknar vi ett lattice med $(X, \wedge, \vee)$ istället för $(X, \leq)$.

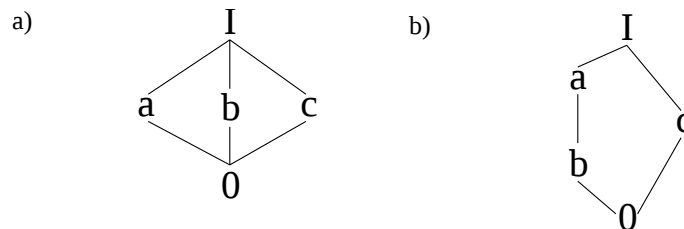
Definition. Ett lattice $(X, \wedge, \vee)$ kallas distributivt om

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{och dualt} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

gäller för alla $a, b, c \in X$.

Att distributivitet är en ganska exklusiv egenskap hos latticestrukturer framgår redan då vi studerar lattice med 5 element.

Exempel.



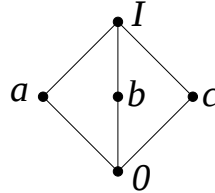
Figur 16.

I a) gäller: $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq I = I \wedge I = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Ej distributiv!

I b) gäller: $a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a \neq b = a \wedge b = (a \wedge b) \vee 0 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Ej distributiv!

Definition. Låt $(X, \wedge, \vee)$ vara ett begränsat lattice med 0 och I . Tag $a \in X$. Då kallas $a' \in X$ för ett komplement till a , om $a \wedge a' = 0$ och $a \vee a' = I$.

Exempel. a) Vi ser att vart och ett av a, b, c i nedanstående lattice har de andra som komplement. Komplement behöver alltså inte vara **entydigt** bestämda.



Figur 17. $a \vee b = I$, $a \wedge b = 0$, $a \vee c = I$, $a \wedge c = 0$, b och c komplement till a .

b) I latticet $(P(X), \cap, \cup)$ har $A \subseteq X$ komplementet $X \setminus A \in P(X)$, ty $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ och $A \cup (X \setminus A) = X$.

Sats 44. Låt $(X, \wedge, \vee)$ vara ett distributivt lattice med nolla och etta. Då har varje element högst ett komplement.

Bevis: Låt b och c vara komplement till $a \in X$. Då gäller

$$a \wedge b = a \wedge c = 0,$$

$$a \vee b = a \vee c = I,$$

och vi får

$$\begin{aligned} b &= b \vee 0 = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c) \\ &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ &= (c \vee a) \wedge (c \vee b) = c \vee (a \wedge b) \\ &= c \vee 0 \\ &= c. \end{aligned}$$

Alltså $b = c$ och därmed har varje element högst ett komplement. $\square$

Booleska algebror

Definition (I). *Ett distributivt lattice $(B, \wedge, \vee)$ med etta och nolla, som är sådant att varje element i B har ett komplement, är en Boolesk algebra. (George Boole (1815–1864), engelsk matematiker).*

Exempel. $(P(X), \cap, \cup)$ är en Boolesk algebra. Låt $A, B, C \subseteq X$. Då gäller:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

så $(P(X), \cap, \cup)$ är distributivt. De övriga egenskaperna har vi visat tidigare.

Definition (II). *En Boolesk algebra B är en mängd B med operationer $\wedge$ och $\vee$ på B med följande egenskaper för alla $a, b, c \in B$:*

- (i) $a \wedge b = b \wedge a$ och $a \vee b = b \vee a$,
- (ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ och $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
- (iii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ och $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,
- (iv) Det existerar element $0, I \in B$ med $a \wedge I = a$ och $a \vee 0 = a$,
- (v) $\forall a \in B \exists a' \in B : a \wedge a' = 0$ och $a \vee a' = I$.

Sats 45. *Definitionerna (I) och (II) är ekvivalenta.*

Bevis: (1) Antag att latticet $(B, \wedge, \vee)$ uppfyller kraven i Definition (I). Sats 41 ger då att latticeoperationerna $\wedge$ och $\vee$ uppfyller kraven (i) och (ii) i Definition (II). Distributiviteten gäller, samt nolla, etta och komplement existerar, så (iii), (iv) och (v) gäller och därmed är kraven i Definition (II) uppfyllda.

(2) Antag att kraven på mängden B i Definition (II) är uppfyllda. Vi definierar en relation $\leq$ på B genom:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a. \quad (*)$$

Vi visar först att $\leq$ definierar en partiell ordning på B .

Reflexivitet. Det gäller att $a \leq a$ för alla $a \in B$, ty om vi i tur och ordning använder (iv), (v), (iii), (v) och (iv) erhålls

$$a = a \wedge I = a \wedge (a \vee a') = (a \wedge a) \vee (a \wedge a') = (a \wedge a) \vee 0 = a \wedge a,$$

så $a = a \wedge a \Leftrightarrow a \leq a$.

Antisymmetri. Det gäller att $(a \leq b$ och $b \leq a) \Rightarrow a = b$, ty med stöd av (*) och (i) gäller

$$(a \wedge b = a \text{ och } b \wedge a = b) \Rightarrow a = b.$$

Transitivitet. Det gäller att $(a \leq b$ och $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$, ty $a = a \wedge b$ och $b \wedge c = b$ medför med hjälp av (ii) att

$$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c,$$

varför $a \leq c$ gäller.

Vi vill nu visa att för den partiellt ordnade mängden $(B, \leq)$ ges supremum av delmängden $\{a, b\}$ av $a \vee b$ och infimum av $a \wedge b$. Med stöd av (i), (ii) och reflexiviteten gäller

$$(a \wedge b) \wedge a = (b \wedge a) \wedge a = b \wedge (a \wedge a) = b \wedge a = a \wedge b,$$

så $a \wedge b \leq a$. Utredningen $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b$ visar att $a \wedge b \leq b$. Således är $a \wedge b$ en minorant till mängden $\{a, b\}$. Antag nu att c är en godtyckligt vald minorant till $\{a, b\}$, vilket medför att $c \leq a$ och $c \leq b$. Då gäller med stöd av (ii) att

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c,$$

vilket ger att $c \leq a \wedge b$. Då är $a \wedge b$ den största minoranten till $\{a, b\}$, dvs.

$$\inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

Vi visar nu att $a \vee b$ är den minsta majoranten till $\{a, b\}$. Först visas att $a \leq a \vee b$, dvs. att $a \wedge (a \vee b) = a$. Med hjälp av (iv) och (iii) erhålls

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = a \vee (0 \wedge b).$$

Vidare gäller med stöd av (i), (iv), (v), (iii), (i), (iv) och (v) att

$$0 \wedge b = b \wedge 0 = (b \wedge 0) \vee 0 = (b \wedge 0) \vee (b \wedge b') = b \wedge (0 \vee b') = b \wedge (b' \vee 0) = b \wedge b' = 0.$$

Alltså får vi med stöd av (iv) och ovanstående att

$$a \wedge (a \vee b) = a \vee 0 = a,$$

och därmed gäller det att $a \leq a \vee b$. Analogt visas att $b \leq a \vee b$. Därmed är $a \vee b$ en majorant till mängden $\{a, b\}$. Antag nu att d är en godtyckligt vald majorant till $\{a, b\}$, dvs. $a \wedge d = a$ och $b \wedge d = b$. Då erhålls med stöd av (i), (iii) och (i) att

$$(a \vee b) \wedge d = d \wedge (a \vee b) = (d \wedge a) \vee (d \wedge b) = (a \wedge d) \vee (b \wedge d) = a \vee b,$$

alltså gäller $a \vee b \leq d$. Därmed är $a \vee b$ den minsta majoranten till $\{a, b\}$,

$$\sup\{a, b\} = a \vee b.$$

Således är $(B, \leq)$ ett lattice. (Sats 40 ger då att $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$).

Nu ger (iii), (iv) och (v) att $(B, \wedge, \vee)$ uppfyller de övriga kraven i Definition (I). $\square$

Exempel. Låt $B = \{0, I\}$. Då är B en Boolesk algebra då $\vee, \wedge$ och $'$ ges av följande tabeller:

$\vee$	0	I
0	0	I
I	I	I

$\wedge$	0	I
0	0	0
I	0	I

$$\begin{cases} 0' = I \\ I' = 0 \end{cases}$$

Man verifierar lätt axiomen i Definition (II) direkt ur ovanstående tabeller. Alternativt, kan man låta 0 vara talet 0, I vara 1 och låta $\vee$ betyda maximum, $\wedge$ minimum och $'$ "byte".

Sats 46. *I en Boolesk algebra $(B, \wedge, \vee)$ gäller:*

- (i) *Komplementet a' till a är entydigt och $(a')' = a$,*
- (ii) *$(a \wedge b)' = a' \vee b'$ och $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, (DeMorgan),*
- (iii) *$0' = I$ och $I' = 0$.*

Bevis: (i) Sats 44 ger att komplementet är entydigt. Emedan $a' \wedge a = a \wedge a' = 0$ och $a' \vee a = a \vee a' = I$, så gäller $(a')' = a$.

(ii) För $a, b \in B$ gäller

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge (a' \vee b') &= ((a \wedge b) \wedge a') \vee ((a \wedge b) \wedge b') = (b \wedge (a \wedge a')) \vee (a \wedge (b \wedge b')) \\ &= (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a' \vee b') &= (a' \vee b') \vee (a \wedge b) = ((a' \vee b') \vee a) \wedge ((a' \vee b') \vee b) \\ &= (b' \vee (a' \vee a)) \wedge (a' \vee (b' \vee b)) = (b' \vee I) \wedge (a' \vee I) \\ &= I \wedge I = I. \end{aligned}$$

Således är $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. Analogt visas att $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

(iii) Nu är $0 \vee I = I$ och $0 \wedge I = 0$, så $0' = I$. Vidare gäller $I \vee 0 = I$ och $I \wedge 0 = 0$, så $I' = 0$. $\square$

Potensmängden $(P(X), \cap, \cup)$ är, som vi vet, en Boolesk algebra. Vi kommer snart att upptäcka att det i någon mening är det **enda** exemplet på en **Boolesk algebra**. Detta skall inte upplevas som ett onödiggörklarande av vårt arbete med att bygga upp teorin för Booleska algebror utan snarare som en djupare förståelse av de strukturer som vi vill studera.

Definition. *Låt $(B, \wedge, \vee)$ vara en Boolesk algebra. Då kallas minimala element i $B \setminus \{0\}$ för atomer i algebran.*

Exempel. I Booleska algebran $(P(X), \cap, \cup)$ är delmängder bestående av **ett** element atomer.

Vi betraktar nu en godtycklig **ändlig** Booleska algebra B . Enligt Lemma 36 finns det minst ett minimalt element i $B \setminus \{0\}$, ty detta är en ändlig partiellt ordnad mängd. Följande resultat gäller:

Lemma 47 *Om $(B, \wedge, \vee)$ är en ändlig Boolesk algebra och $b \in B \setminus \{0\}$, så finns det minst en atom $a \in B$ med $a \leq b$.*

Bevis: Emedan mängden $\{x \in B : x \leq b \text{ och } x \neq 0\}$ är ändlig och partiellt ordnad, så ger Lemma 36 att den har minst ett minimalt element. Tag ett sådant minimalt element y . Är y en atom i B ? Antag att $a \neq 0$ är ett element i B med $a \leq y$. Då gäller $a \leq y \leq b$, varför också $a \in \{x \in B : x \leq b \text{ och } x \neq 0\}$. Emedan y är minimal i denna mängd följer det att $y = a$. Därmed är y en atom i B . $\square$

Vi har följande resultat:

Sats 48. Låt $(B, \wedge, \vee)$ vara en ändlig Boolesk algebra och låt $b \in B \setminus \{0\}$. Då gäller att

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k,$$

där

$$\{a_1, \dots, a_k\} = \{x \in B : x \text{ är en atom och } x \leq b\}.$$

Framställningen av ett element som supremum av atomer är sånär som på atomernas ordning entydig.

Bevis: Definiera för $b \in B \setminus \{0\}$ mängden $At(b)$ genom

$$At(b) = \{a \in B : a \text{ är en atom och } a \leq b\}.$$

Lemma 47 ger att $At(b) \neq \emptyset$. Sats 42 (ii) kan generaliseras till att gälla för ett ändligt antal a_j . ($(a_1 \leq b, \dots, a_k \leq b) \Leftrightarrow a_1 \vee \dots \vee a_k \leq b$). Då gäller

$$\bigvee_{a \in At(b)} a \leq b.$$

Vi bör således visa att $b \leq \bigvee_{a \in At(b)} a$. Vi visar först att $b \wedge (\bigvee_{a \in At(b)} a)' = 0$, ty då gäller det att

$$\begin{aligned} b &= b \wedge I = b \wedge \left(\left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right) \vee \left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right)' \right) \\ &= \left(b \wedge \left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right) \right) \vee \left(b \wedge \left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right)' \right) \\ &= b \wedge \left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right), \end{aligned}$$

varur följer, med stöd av Sats 40 ii), att $b \leq \bigvee_{a \in At(b)} a$. Låt oss nu uppställa antitesen att $b \wedge \left(\bigvee_{a \in At(b)} a \right)' = c \neq 0$. Med hjälp av Sats 46 (ii) erhålls att

$$\begin{aligned} c &= b \wedge a'_1 \wedge a'_2 \wedge \dots \wedge a'_k \\ &\Rightarrow c = (b \wedge a'_l) \wedge (a'_1 \wedge \dots \wedge a'_{l-1} \wedge a'_{l+1} \wedge \dots \wedge a'_k) \\ &\Rightarrow c \leq b \wedge a'_l, \quad \text{för alla } a_l \in At(b). \end{aligned}$$

Låt nu a vara en atom med $a \leq c$. (Lemma 47 ger att a existerar). Då $a \leq c \leq b$, följer det att $a \in At(b)$. Därmed gäller även

$$a \leq c \leq b \wedge a' \leq a',$$

varför, (Sats 40 ii)), $a = a \wedge a' = 0$. Av denna **motsägelse** följer att antitesen är falsk, dvs. att $b \wedge \left(\bigvee_{a \in \text{At}(b)} a \right)' = 0$, och därmed är $b \leq \bigvee_{a \in \text{At}(b)} a$. Alltså erhålls

$$b = \bigvee_{a \in \text{At}(b)} a.$$

Entydigheten: Antag att $\bigvee_i a_i = \bigvee_j b_j$, där alla a_i och b_j är atomer. Då gäller, med beaktande av att $a_k \wedge a_j = 0$ om $j \neq k$ och $a_k \wedge a_k = a_k$, att

$$a_k = a_k \wedge \left(\bigvee_i a_i \right) = a_k \wedge \left(\bigvee_j b_j \right) = \bigvee_j (a_k \wedge b_j).$$

Då a_k är en atom måste $a_k \wedge b_j$ vara antingen 0 eller a_k . På basen av ovanstående måste då $a_k \wedge b_j = a_k$ för något b_j . Men då även b_j är en atom gäller

$$a_k = a_k \wedge b_j = b_j.$$

Analogt visas att varje b_k sammanfaller med något a_i . Mängderna $\{a_i\}$ och $\{b_j\}$ är därför lika och framställningen är entydig. $\square$

Definition. En bijektion $\varphi : (B_1, \wedge_1, \vee_1) \rightarrow (B_2, \wedge_2, \vee_2)$ mellan Booleska algebror är en Boolesk isomorfism, om

- (i) $\varphi(a \vee_1 b) = \varphi(a) \vee_2 \varphi(b)$ för alla $a, b \in B_1$,
- (ii) $\varphi(a \wedge_1 b) = \varphi(a) \wedge_2 \varphi(b)$ för alla $a, b \in B_1$,
- (iii) $\varphi(a') = \varphi(a)'$ för varje $a \in B_1$.

För vårt exempel $(P(X), \cap, \cup)$ säger ju inte Sats 48 något nytt, endast att om $A \in P(X)$, så gäller

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}.$$

Men den ger oss dock möjligheten att genomföra den utlovade karakteriseringen av **ändliga** Booleska algebror.

Sats 49. Låt $(B, \wedge, \vee)$ vara en ändlig Boolesk algebra. Då finns en Boolesk isomorfism $\varphi : (B, \wedge, \vee) \rightarrow (P(X), \cap, \cup)$, där $X = \{a \in B : a \text{ är en atom}\}$, $\varphi(0) = \emptyset$ och $\varphi(b) = \text{At}(b)$, då $b \neq 0$. Här är $\text{At}(b) = \{a \in B : a \text{ är en atom och } a \leq b\}$.

Bevis: Den entydiga framställningen i Sats 48 ger oss möjligheten att definiera en funktion

$$\varphi : B \rightarrow P(X),$$

där $X = \{a \in B : a \text{ är en atom}\}$, genom

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= \text{At}(b), \quad \text{då } b \neq 0, \\ \varphi(0) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Klart att $At(b) \in P(X)$ för varje $b \in B \setminus \{0\}$ och att $At(b) \neq \emptyset$ då $b \in B \setminus \{0\}$, (Lemma 47). Vi visar först att φ är en bijektion.

Funktionen φ är **injektiv**, ty antag att $\varphi(a) = \varphi(b)$, $a, b \neq 0$, dvs. $At(a) = At(b)$. Sats 48 ger att $a = \bigvee_{c \in At(a)} c$ och $b = \bigvee_{c \in At(b)} c$, vilket innebär att $a = b$, ty $At(a) = At(b)$.

Funktionen φ är **surjektiv**, ty tag $Y \in P(X)$ sådant att $Y \neq \emptyset$. Då består Y av atomer. Sätt $z = \bigvee_{a \in Y} a \in B \setminus \{0\}$. Sats 48 ger att $z = \bigvee_{a \in At(z)} a$. Entydigheten i framställningen ger att $Y = At(z)$, dvs. $\varphi(z) = At(z) = Y$. (Dessutom gäller $\varphi(0) = \emptyset$).

Nu bör vi besvara frågan: Är φ en Boolesk isomorfism mellan $(B, \wedge, \vee)$ och $(P(X), \cap, \cup)$? Tag då $b, c \in B$. Vi kan anta att $b, c \neq 0$. Då är $b = \bigvee_{b_i \in At(b)} b_i$ och $c = \bigvee_{c_j \in At(c)} c_j$, varför

$$b \wedge c = \left(\bigvee_i b_i \right) \wedge \left(\bigvee_j c_j \right) = \bigvee_{i,j} (b_i \wedge c_j) = \bigvee_{a \in At(b) \cap At(c)} a,$$

ty $b_i \wedge c_j = 0$ om $b_i \neq c_j$ och $b_i \wedge c_j = b_i$ om $b_i = c_j$. Vidare gäller

$$b \vee c = \left(\bigvee_{b_i \in At(b)} b_i \right) \vee \left(\bigvee_{c_j \in At(c)} c_j \right) = \bigvee_{a \in At(b) \cup At(c)} a.$$

Både $b \wedge c$ och $b \vee c$ är framställda som supremum av atomer och enligt Sats 48 är framställningarna entydiga, varför

$$\varphi(b \vee c) = At(b) \cup At(c) = \varphi(b) \cup \varphi(c), \quad (i)$$

$$\varphi(b \wedge c) = At(b) \cap At(c) = \varphi(b) \cap \varphi(c). \quad (ii)$$

Då $a \leq I$ för alla atomer a , gäller det att $\varphi(I) = X$. Nu erhålls

$$\varphi(a) \cup \varphi(a') = \varphi(a \vee a') = \varphi(I) = X,$$

$$\varphi(a) \cap \varphi(a') = \varphi(a \wedge a') = \varphi(0) = \emptyset.$$

Då erhålls med stöd av Sats 46 (i) och ovanstående att $\varphi(a)' = \varphi(a')$ för alla $a \in B$. $\square$

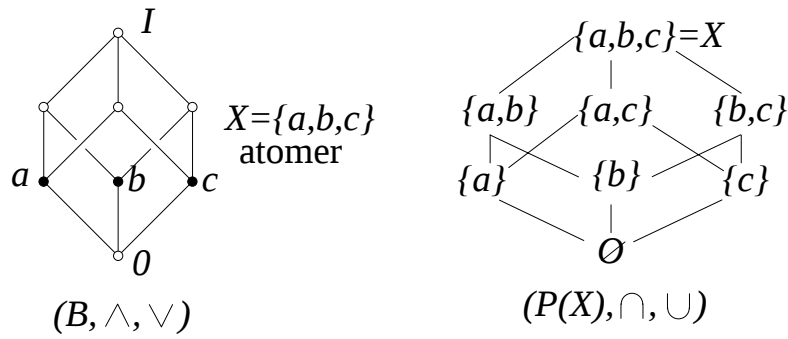
Då B är ändlig och $\varphi : B \rightarrow P(X)$ är bijektiv i föregående sats, så erhålls direkt:

Korollarium 50. Låt $(B, \wedge, \vee)$ vara en ändlig Boolesk algebra. Då gäller:

$$|B| = |P(X)| = 2^n,$$

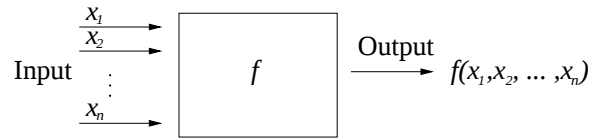
där $n =$ antalet atomer i B .

Låt oss nu illustrera ovanstående bevis av Sats 49 då vi har 3 atomer. Låt B vara motsvarande Booleska algebra. Då har vi att $|B| = |P(X)| = 2^3 = 8$ element.



Figur 18.

Exempel. Låt oss betrakta **kopplingsfunktioner**.



Figur 19. $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Låt $\mathcal{F}_n$ beteckna mängden av alla kopplingsfunktioner med n binära inputvariabler. Tag $f, g \in \mathcal{F}_n$ och definiera för alla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Då kan vi visa att $\mathcal{F}_n$ är distributivt med avseende på operationerna $\vee$ och $\wedge$, (hemuppgift). Vidare gäller (i) och (ii) i Definition (II). Ettan ges av $I(x) = 1$, $x \in \{0, 1\}^n$ och nollan ges av $0(x) = 0$, $x \in \{0, 1\}^n$. Vidare definierar vi

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } f(x) = 1; \\ 1, & \text{om } f(x) = 0. \end{cases}$$

Alltså gäller

$$f'(x) = 1 - f(x), \quad x \in \{0, 1\}^n.$$

Nu gäller

$$(f \vee f')(x) = \max\{f(x), f'(x)\} = 1 = I(x), \quad \text{för varje } x \in \{0, 1\}^n,$$

varför $f \vee f' = I$. Dessutom gäller det att

$$(f \wedge f')(x) = \min\{f(x), f'(x)\} = 0 = 0(x), \quad \text{för varje } x \in \{0, 1\}^n,$$

varför $f \wedge f' = 0$. Då är f' ett komplement till f . Sammanfattningsvis gäller då att $(\mathcal{F}_n, \wedge, \vee)$ är en **Boolesk algebra**.

Enligt Sats 40 b) gäller $f \leq g \Leftrightarrow f \wedge g = f$, dvs. f :s värde för varje inputmängd $(x_1, \dots, x_n)$ är mindre eller lika med motsvarande värde för g .

Tag $n = 2$, dvs. betrakta $\mathcal{F}_2$. Då har vi som bekant 16 kopplingsfunktioner:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Notera att $f_0 = 0$ och $f_{15} = I$. Vilka är $\mathcal{F}_2$:s atomer? För att $f \in \mathcal{F}_2$ skall vara en atom måste f endast vara större än $f_0 = 0$, dvs. f måste ha värdet 1 för endast en inputmängd och 0 för de övriga. Alltså är f_1, f_2, f_4 och f_8 atomer i $(\mathcal{F}_2, \wedge, \vee)$.

Enligt Sats 49 finns en Boolesk isomorfism $\varphi : (\mathcal{F}_2, \wedge, \vee) \rightarrow (P(X), \cap, \cup)$, där $X = \{f_1, f_2, f_4, f_8\}$. Vi får då med stöd av Korollarium 50 att $|\mathcal{F}_2| = |P(X)| = 2^4 = 16$, som sig bör.

Med stöd av Sats 48 kan varje $f \in \mathcal{F}_2 \setminus \{f_0\}$ uttryckas med hjälp av de atomer som är $\leq f$. Tag t.ex. $f_{13} \in \mathcal{F}_2$. Då gäller $f_1 \leq f_{13}$, $f_4 \leq f_{13}$ och $f_8 \leq f_{13}$. Då har vi att

$$f_{13} = f_1 \vee f_4 \vee f_8.$$

De övriga $f \in \mathcal{F}_2 \setminus \{f_0\}$ kan uttryckas analogt.

Booleska polynom

Vi skall nu allmänt definiera Booleska polynom.

Definition. Ett Booleskt polynom i variablerna $x_1, \dots, x_n$ är ett uttryck i $0, I, x_1, \dots, x_n$ medelst operationerna $\vee, \wedge$ och komplementbildning $'$.

(i) $0, I, x_1, \dots, x_n$ är själva Booleska polynom,

(ii) Om p och q är Booleska polynom, så är även $p \vee q$, $p \wedge q$ och p' Booleska polynom.

Ett Booleskt polynom p i variablerna $x_1, \dots, x_n$ kommer vi att beteckna $p(x_1, \dots, x_n)$. Booleska polynom kallas också **Booleska uttryck**.

Exempel. I , x , y , $x \vee y'$, $I \wedge (x \vee y)'$ och $(I \wedge (x \vee y)')'$ är Booleska polynom i variablerna x, y .

Man kan beräkna (evaluera) Booleska polynom för olika värden på variablerna $x_1, \dots, x_n$. Oftast räcker det med att välja $x_i = 0$ eller $x_i = 1$, dvs. man kan betrakta Booleska algebran $B = \{0, 1\}$. Ibland skriver man falsk eller sann för 0 respektive 1.

Om $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, så gäller att $p(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$, ty $\{0, 1\}$ är sluten under $\wedge, \vee$ och $'$. Följaktligen definierar varje Booleskt polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ en avbildning

$$f_p : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\},$$

där avbildningen f_p associerad med p kan ges genom en s.k. funktionsvärdestabell. Alltså $f_p \in \mathcal{F}_n$.

Exempel. Beräkna $p(x, y) = (x \vee y') \wedge (x' \vee y)$, då $x, y \in \{0, 1\}$.

$$p(0, 0) = (0 \vee 0') \wedge (0' \vee 0) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$p(0, 1) = (0 \vee 1') \wedge (0' \vee 1) = (0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0$$

$$p(1, 0) = (1 \vee 0') \wedge (1' \vee 0) = (1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 0 = 0$$

$$p(1, 1) = (1 \vee 1') \wedge (1' \vee 1) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$$

Då är

(x, y)	$f_p(x, y)$
$(0, 0)$	1
$(0, 1)$	0
$(1, 0)$	0
$(1, 1)$	1

Definition. Vi säger att $p(x_1, \dots, x_n)$ och $q(x_1, \dots, x_n)$ är ekvivalenta om $f_p = f_q$.

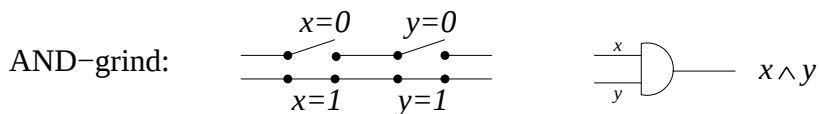
Exempel. Det är lätt att se att $(x \vee y') \wedge (x' \vee y)$ och $(y' \wedge x') \vee (x \wedge y)$ är ekvivalenta. Man behöver endast kontrollera att båda uttrycken har samma funktionsvärdestabell.

Om vi behandlar variablerna som om de vore element i en Boolesk algebra, så ger räkneregler för Booleska algebror

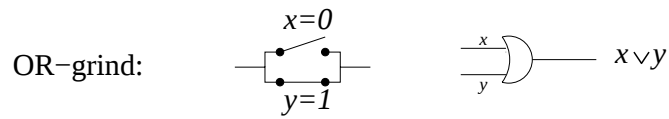
$$\begin{aligned} (x \vee y') \wedge (x' \vee y) &= [(x \vee y') \wedge x'] \vee [(x \vee y') \wedge y] \\ &= [(x \wedge x') \vee (y' \wedge x')] \vee [(x \wedge y) \vee (y' \wedge y)] \\ &= 0 \vee (y' \wedge x') \vee (x \wedge y) \vee 0 \\ &= (y' \wedge x') \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

Allmänt, alltid då $q(x_1, \dots, x_n)$ kan erhållas ur $p(x_1, \dots, x_n)$ med räkneregler för Booleska algebror, så har vi att p och q är ekvivalenta.

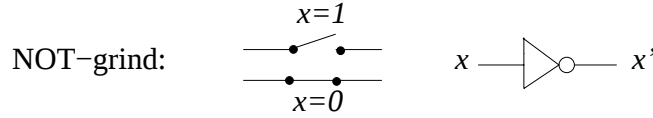
Låt oss nu kort diskutera grindar:



$$\begin{cases} \text{Indata } (x, y) \\ \text{Utdata } x \wedge y \end{cases}$$



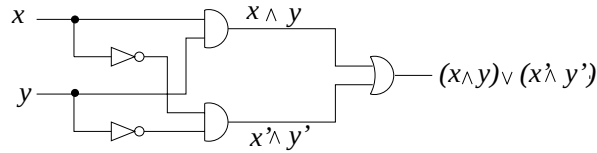
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Indata } (x, y) \\ \text{Utdata } x \vee y \end{array} \right.$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Indata } x \\ \text{Utdata } x' \end{array} \right.$

Alltså AND, OR och NOT grindar svarar mot $\wedge, \vee$ och $'$ opererande på $\{0, 1\}$, varför grinddiagram svarar mot Booleska polynom.

Betrakta följande kopplingsschema, som svarar mot det Booleska polynomet $p(x, y) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$.

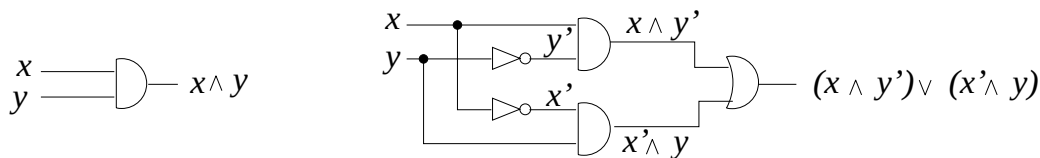


Figur 20.

Låt oss betrakta följande funktionsvärdestabeller:

x	y	f_p	x	y	f_q
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Klart att $q(x, y) = x \wedge y$. För $p(x, y)$ behövs ett Booleskt uttryck som antar värdet 1 då exakt den ena av x, y antar värdet 1. Vi noterar att $x \wedge y'$ och $x' \wedge y$ har denna egenskap. Inga andra infimum av par duger. Nu är det lätt att se att $p(x, y) = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$. Vidare får vi följande kopplingsscheman:



Figur 21.

Problemet att konstruera ett kopplingsschema (grinddiagram) att svara mot en krets med specificerade egenskaper är precis att hitta ett Booleskt uttryck med en given funktionsvärdestabell. Vår nästa sats löser detta problem, vilket kan anses både överraskande och viktigt.

Sats 51. Varje avbildning $f \in \mathcal{F}_n$, $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, sammanfaller med $f_p \in \mathcal{F}_n$ för något Booleskt polynom $p(x_1, \dots, x_n)$. Ett lämpligt val av p kan beskrivas på följande sätt: För $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, definiera mintermen

$$p_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\varepsilon_1} \wedge x_2^{\varepsilon_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\varepsilon_n},$$

där

$$x_j^{\varepsilon_j} = \begin{cases} x_j, & \text{om } a_j = 1; \\ x'_j, & \text{om } a_j = 0. \end{cases}$$

Definiera sedan

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigvee \{p_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_n) : f(\bar{a}) = 1\}.$$

Bevis: Låt $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Vi har valt det Booleska polynomet så att

$$p_{\bar{a}}(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} 1, & \text{om } \bar{a} = \bar{b}, \\ 0, & \text{om } \bar{a} \neq \bar{b}. \end{cases}$$

Vi påstår att $f_p(b_1, \dots, b_n) = f(b_1, \dots, b_n)$ för varje $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$.

Antag att $f(b_1, \dots, b_n) = 1$. Då gäller

$$\begin{aligned} p(b_1, \dots, b_n) &= \bigvee \{p_{\bar{a}}(b_1, \dots, b_n) : f(\bar{a}) = 1\} \\ &\geq p_{\bar{b}}(b_1, \dots, b_n) \quad (\text{ty } f(\bar{b}) = 1) \\ &= 1, \quad (\text{med stöd av ovanstående}). \end{aligned}$$

Alltså: $f(b_1, \dots, b_n) = 1$ medför att $p(b_1, \dots, b_n) = 1$.

Antag nu att $f(b_1, \dots, b_n) = 0$. Då ger $f(\bar{a}) = 1$ att $\bar{b} \neq \bar{a}$, varför $p_{\bar{a}}(b_1, \dots, b_n) = 0$. Således:

$$p(b_1, \dots, b_n) = \bigvee \{p_{\bar{a}}(b_1, \dots, b_n) : f(\bar{a}) = 1\} = 0,$$

och därmed gäller det att $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ medför att $p(b_1, \dots, b_n) = 0$. $\square$

Definition. Ett Booleskt polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ är i disjunktiv normalform om

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^m (x_1^{\varepsilon_1^{(j)}} \wedge \dots \wedge x_n^{\varepsilon_n^{(j)}}),$$

där

$$x_k^{\varepsilon_k^{(j)}} = x_k \text{ eller } x_k^{\varepsilon_k^{(j)}} = x'_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Sats 51 ger att varje Booleskt polynom är ekvivalent med ett Booleskt polynom i disjunktiv normalform.

Exempel. Låt oss betrakta polynomet $p(x, y, z) = (x' \vee y) \wedge (x \vee z')$. Vi söker p med stöd av Sats 51, så vi behöver endast beakta $f_p(\bar{a}) = 1$.

$\bar{a} = (x, y, z)$	$f_p(x, y, z)$
(0, 0, 0)	1
(0, 0, 1)	0
(0, 1, 0)	1
(0, 1, 1)	0
(1, 0, 0)	0
(1, 0, 1)	0
(1, 1, 0)	1
(1, 1, 1)	1

Således erhåller vi:

$$p(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Låt oss titta på vårt tidigare exempel, $p(x, y) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$.

$\bar{a} = (x, y)$	$f_p(x, y)$
(0, 0)	0
(0, 1)	1
(1, 0)	1
(1, 1)	0

Då ger Sats 51 att $p(x, y) = (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$.

Dualt finns en **konjunktiv normalform** av typen

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m (x_1^{\varepsilon_1^{(j)}} \vee \dots \vee x_n^{\varepsilon_n^{(j)}}),$$

där

$$x_k^{\varepsilon_k^{(j)}} = x_k \text{ eller } x_k^{\varepsilon_k^{(j)}} = x'_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Låt oss försöka bestämma en konjunktiv normalform för polynomet p i tre variabler:

$$p(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Med stöd av Sats 46 bildar vi p' :

$$p'(x, y, z) = (x' \vee y') \wedge (x' \vee z') \wedge (y' \vee z').$$

Sedan söker vi den disjunktiva normalformen till p' och därefter får vi $p = (p')'$ i konjunktiv normalform.

$\bar{a} = (x, y, z)$	$f_{p'}(x, y, z)$
(0, 0, 0)	1
(0, 0, 1)	1
(0, 1, 0)	1
(0, 1, 1)	0
(1, 0, 0)	1
(1, 0, 1)	0
(1, 1, 0)	0
(1, 1, 1)	0

Den disjunktiva normalformen är $p'(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z')$.

Den konjunktiva normalformen av p är således $p(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z)$

Såsom vi redan har konstaterat löser Sats 51 problemet med att hitta ett Booleskt polynom med en given funktionsvärdestabell. Men i de flesta tillämpningar är det inte normalformen av ett Booleskt polynom som intresserar oss mest utan snarare den form som totalt sett tar minst antal operationer i anspråk. Handlar det om digitala nät svarar varje operation mot en digital komponent och sådana vill man inte slösa med.

Det finns metoder för att minimera Booleska uttryck, dvs. minimera antalet grindar, och vi skall avslutningsvis kort behandla en sådan metod.

Karnaugh-avbildningar

Proceduren att minimera normalformen av ett Booleskt uttryck i två, tre eller fyra variabler kan utföras med ett **grafiskt** tillvägagångssätt som kallas en **Karnaugh-avbildning**. Denna teknik, som introducerades 1953 av *Maurice Karnaugh*, kan utvidgas att gälla för Booleska uttryck av fem eller sex variabler, men vi nöjer oss med högst fyra variabler.

Vårt mål är att lära oss grundläggande fakta om Karnaugh-avbildningar, hur man konstruerar dem, och dessutom hur Booleska uttryck kan minimeras med hjälp av Karnaugh-avbildningar.

Nedanstående figurer visar Karnaugh-avbildningar för Booleska uttryck i två, tre och fyra variabler, vilka har 4, 8 respektive 16 celler. Antalet celler i en Karnaugh-avbildning är 2^n , då n är antalet variabler i det Booleska polynomet.

	y	y'
x		1
x'		
	$x \wedge y'$	

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		1		
x'			1	
	$(x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z')$			

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy				
xy'			1	
$x'y'$				
$x'y$				
	$x \wedge y' \wedge \omega' \wedge z'$			

Dessa celler svarar mot **mintermer** av 2-,3- och 4-variabel Booleska uttryck. För att hitta mintermen i

en speciell cell i Karnaugh-avbildningen bildar man infimum av de variabler som finns i början av raden och på toppen av kolonnen till cellen ifråga.

Raderna och kolonnerna i en Karnaugh-avbildning är försedda med etiketter enligt ett visst mönster. Nämligen, varje rad- och kolonnetikett i en Karnaugh-avbildning skiljer sig från sin grannetikett i **exakt en** variabel.

För att konstruera Karnaugh-avbildningen av ett Booleskt uttryck går vi tillväga på följande sätt: Givet ett Booleskt uttryck i disjunktiv normalform. Vi konstruerar Karnaugh-avbildningen genom att sätta en 1:a i varje cell som svarar mot en minterm i uttrycket.

Exempel. Konstruera Karnaugh-avbildningar av:

a) $(x \wedge y) \vee (x' \wedge y)$

b) $(x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$

a)

	y	y'
x	1	
x'	1	

b)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	1	1		
x'	1	1		

Definition. Två celler i en Karnaugh-avbildning är grannar, om deras mintermer är olika i exakt en variabel.

Exempelvis är cellerna $x \wedge y \wedge z'$ och $x' \wedge y \wedge z'$ grannar i ovanstående exempel fall b), men $x \wedge y \wedge z'$ och $x' \wedge y \wedge z$ är inte grannar.

Geometriskt är cellerna i en Karnaugh-avbildning grannar om de har en gräns, som är en rät linje, gemensam. Alltså, grannceller ligger bredvid varandra eller direkt under och ovanför varandra.

Denna tolkning leder emellertid till **ett problem**. Om en cell i en 3-variabel Karnaugh-avbildning har tre grannceller, så vilka celler är då grannar till hörncellen $x \wedge y \wedge z$?

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	1	•		•
x'	•			

Det är lätt att hitta **två** grannceller, nämligen $x' \wedge y \wedge z$ och $x \wedge y \wedge z'$. Definitionen på granncell ger att också $x \wedge y' \wedge z$ är granne till $x \wedge y \wedge z$.

Därför gäller: I en 3-variabel Karnaugh-avbildning, är cellerna i **början** och **slutet** av en rad grannceller.

Analogt gäller: I en 4-variabel Karnaugh-avbildning, är cellerna i **början** och **slutet** av en rad grannceller, samt cellerna i **slutet** och **början** av en kolonn är grannceller.

Exempel. Vilka är granncellerna till $x' \wedge y \wedge w' \wedge z'$ och $x \wedge y \wedge w' \wedge z$?

	wz	wz'	$w'z'$	$w'z$
xy				1
xy'				
$x'y'$				
$x'y$			1	

Varje cell har n st. grannceller, $n =$ antalet variabler.

$x' \wedge y \wedge w' \wedge z'$ grannceller: $x' \wedge y \wedge w \wedge z'$, $x' \wedge y' \wedge w' \wedge z'$, $x' \wedge y \wedge w' \wedge z$ och $x \wedge y \wedge w' \wedge z'$.

$x \wedge y \wedge w' \wedge z$ grannceller: $x \wedge y \wedge w' \wedge z'$, $x \wedge y' \wedge w' \wedge z$, $x \wedge y \wedge w \wedge z$ och $x' \wedge y \wedge w' \wedge z$.

Låt oss nu se varför grannceller är viktiga i Karnaugh-avbildningar.

Lemma 52. Låt p vara ett Booleskt uttryck. Då gäller

$$(p \wedge x) \vee (p \wedge x') = p.$$

Bevis: $(p \wedge x) \vee (p \wedge x') = p \wedge (x \vee x') = p \wedge I = p.$ $\square$

Exempel. a)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		1	1	
x'				

Granncellerna $x \wedge y \wedge z'$ och $x \wedge y' \wedge z'$ är markerade med ettor. Lemma 52 tillämpas med $p(x, y, z) = x \wedge z'$,

$$(x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') = \overbrace{((x \wedge z') \wedge y)}^p \vee \overbrace{((x \wedge z') \wedge y')}^p = x \wedge z'.$$

Den disjunktiva normalformen $(x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z')$ kan ersättas med det ekvivalenta uttrycket $x \wedge z'$.

b)

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy		1	1	
xy'		1	1	
$x'y'$				
$x'y$				

Supremum av de fyra min-termerna förenklas:

$$(x \wedge y \wedge w' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge w' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge w \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge w \wedge z') = \{(x \wedge w' \wedge z') \wedge \overbrace{(y \vee y')}^I\} \vee \{(x \wedge w \wedge z') \wedge \underbrace{(y \vee y')}_I\} = (x \wedge w' \wedge z') \vee (x \wedge w \wedge z') = (x \wedge z') \wedge \underbrace{(w' \vee w)}_I = x \wedge z'.$$

Dessa algebraiska förenklingar kan göras grafiskt på en Karnaugh-avbildning genom att använda basrektanglar. Med en **basrektangel** avses någon av följande:

- En ensam cell med 1:a.
- Två grannceller med 1:or.
- Fyra grannceller med 1:or som antingen bildar en 1×4 rektangel eller en 2×2 rektangel.
- Åtta grannceller med 1:or som bildar en 2×4 rektangel.

Det är **viktigt** att minnas att en basrektangel måste ha en, två, fyra eller åtta celler.

I följande figurer visas basrektanglar för 2-variabel och 3-variabel Karnaugh-avbildningar.

$ \begin{array}{c} y \quad y' \\ \begin{array}{ c c } \hline x & 1 & \\ \hline x' & & \\ \hline \end{array} \\ (x \wedge y) \end{array} $	$ \begin{array}{c} y \quad y' \\ \begin{array}{ c c } \hline x & & 1 \\ \hline x' & & 1 \\ \hline \end{array} \\ (y') \end{array} $	$ \begin{array}{c} y \quad y' \\ \begin{array}{ c c } \hline x & 1 & 1 \\ \hline x' & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ (I) \end{array} $
$ \begin{array}{c} yz \quad yz' \quad y'z' \quad y'z \\ \begin{array}{ c c c c } \hline x & 1 & 1 & & \\ \hline x' & & & & \\ \hline \end{array} \\ (x \wedge y) \end{array} $	$ \begin{array}{c} yz \quad yz' \quad y'z' \quad y'z \\ \begin{array}{ c c c c } \hline x & & & & \\ \hline x' & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ (x') \end{array} $	$ \begin{array}{c} yz \quad yz' \quad y'z' \quad y'z \\ \begin{array}{ c c c c } \hline x & & 1 & 1 & \\ \hline x' & & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \\ (z') \end{array} $
$ \begin{array}{c} yz \quad yz' \quad y'z' \quad y'z \\ \begin{array}{ c c c c } \hline x & 1 & & & 1 \\ \hline x' & & & & \\ \hline \end{array} \\ (x \wedge z) \end{array} $	$ \begin{array}{c} yz \quad yz' \quad y'z' \quad y'z \\ \begin{array}{ c c c c } \hline x & 1 & & & 1 \\ \hline x' & 1 & & & 1 \\ \hline \end{array} \\ (z) \end{array} $	

Basrektanglar med två, fyra och åtta celler i 4-variabel Karnaugh-avbildningar ges i följande figurer:

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy				
xy'		1		
$x'y'$		1		
$x'y$				

$(y' \wedge \omega \wedge z')$

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy	1			1
xy'	1			1
$x'y'$				
$x'y$				

$(x \wedge z)$

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy	1			1
xy'				
$x'y'$				
$x'y$	1			1

$(y \wedge z)$

	ωz	$\omega z'$	$\omega' z'$	$\omega' z$
xy				
xy'	1	1	1	1
$x'y'$	1	1	1	1
$x'y$				

(y')

Vår definition av en basrektangel tillåter en basrektangel att innehålla en annan basrektangel. Därför inför vi:

Definition. En maximal rektangel i en Karnaugh-avbildning är en basrektangel som inte innehålls i någon större basrektangel.

För att minimera ett Booleskt polynom gör vi såhär:

- Konstruera Karnaugh-avbildningen.
- Bestäm **minsta** antalet maximala rektanglar som tillsammans innehåller alla celler med 1:or.
- Förenkla de maximala rektanglarna och bilda supremum av dessa termer.

Exempel. Låt $f \in \mathcal{F}_2$ ha följande funktionsvärdestabell:

(x, y)	$f(x, y)$
(0, 0)	1
(0, 1)	1
(1, 0)	1
(1, 1)	0

Sats 51 ger att $p(x, y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$. Karnaugh-avbildningen av f blir då

	y	y'
x		1
x'	1	1

Två maximala basrektanglar ges av $p(x, y) = x' \vee y'$ och två basrektanglar ges av $p(x, y) = (x' \wedge y) \vee y'$. Man bör alltså använda sig av maximala basrektanglar.

Exempel. Minimera följande Booleska polynom:

$$p(x, y, z) = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$$

	yz	yz'	y'z'	y'z
x		1	1	1
x'	1	1		

Ur Karnaughdiagrammet fås att $p(x, y, z) = (x' \wedge y) \vee (y \wedge z') \vee (x \wedge y')$.

Minimering av normalformen är inte entydig. Vi har nämligen:

	yz	yz'	y'z'	y'z
x		1	1	1
x'	1	1		

Ur detta diagram fås att $p(x, y, z) = (x' \wedge y) \vee (x \wedge z') \vee (x \wedge y')$

Exempel. Minimera följande Booleska uttryck:

$$p(x, y, z, w) = (x \wedge y' \wedge w \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge w' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge w' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge w' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge w \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge w \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge w' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge w \wedge z')$$

	wz	wz'	w'z'	w'z
xy				
xy'		1	1	
x'y'		1	1	1
x'y	1	1		1

Det finns många sätt att inkludera alla celler med 1:or i maximala rektanglar:

	wz	wz'	w'z'	w'z
xy				
xy'		1	1	
x'y'		1	1	1
x'y	1	1		1

4 maximala rektanglar.

	wz	wz'	w'z'	w'z
xy				
xy'		1	1	
x'y'		1	1	1
x'y	1	1		1

3 maximala rektanglar.

Vi får alltså att $p(x, y, z, w) = (y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge w) \vee (x' \wedge w' \wedge z)$.

Exempel. Förenkla $p(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y' \vee z) \wedge (x' \vee z)$.

Vi bestämmer funktionsvärdestabellen svarande mot p :

(x, y, z)	$f(x, y, z)$
(0, 0, 0)	0
(0, 0, 1)	0
(0, 1, 0)	0
(0, 1, 1)	1
(1, 0, 0)	0
(1, 0, 1)	1
(1, 1, 0)	0
(1, 1, 1)	1

Sats 51 ger nu att:

$$p(x, y, z) = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Karnaugh-avbildningen av detta ser ut som följande:

	yz	yz'	y'z'	y'z
x	1			1
x'	1			

Vi får nu att $p(x, y, z) = (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$.

Exempel. Betrakta Karnaugh-avbildningen:

	wz	wz'	w'z	w'z'
xy		1		
xy'		1	1	
x'y'			1	
x'y			1	

	wz	wz'	w'z	w'z'
xy		1		
xy'		1	1	
x'y'			1	
x'y			1	

Vi har tre maximala rektanglar i båda fallen. Komponenterna kan skrivas som:

$$p(x, y, z, w) = (x \wedge w \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge w' \wedge z') \text{ eller } p(x, y, z, w) = (x \wedge w \wedge z') \vee (y' \wedge w' \wedge z') \vee (x' \wedge w' \wedge z')$$

Om vi utgår från komplementet av Karnaugh-avbildningen erhåller vi p' :

	wz	wz'	w'z	w'z'
xy	1		1	1
xy'	1			1
x'y'	1	1		1
x'y	1	1		1

Ur diagrammet fås att $p'(x, y, z, w) = z \vee (x' \wedge w) \vee (x \wedge y \wedge w')$. Således fås med $p = (p')'$ att $p(x, y, z, w) = z' \wedge (x \vee w') \wedge (x' \vee y' \vee w)$, som innehåller färre operationer än de tidigare minimala formerna.