Elementär gruppteori, kurstentamen 25.10.2018

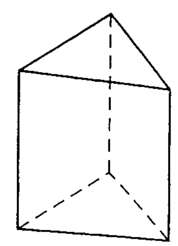
1. Besvara följande delfrågor:
   a) Vad krävs för att en algebraisk struktur $\langle G, *\rangle$ skall vara en grupp ?
   b) Vad avses med en Abelsk grupp? Definiera begreppet cyklisk grupp.
   c) När är två grupper $\langle G, *\rangle$ och $\langle H, \diamond\rangle$ isomorfa ?
   d) Antag att $\langle G, *\rangle$ är en grupp. Hur kan man kontrollera om en delmängd H till G är en undergrupp till $\langle G, *\rangle$?
   e) Givet en grupp G med undergruppen H och elementet $a \in G$. Definiera vänstersidoklassen aH.
   f) Hur lyder Lagranges sats ?

2. Låt S_n beteckna den symmetriska gruppen av permutationer av mängden $X = \{1, 2, ..., n\}$.
   a) Antag att permutationen $g \in S_9$ och är given av
   $$g = (1358)(243)(6879)(721)\,.$$
   Skriv g som en produkt av disjunkta cykler.
   b) Betrakta undergruppen $H = \langle(1346)\rangle$ till S_6. Uppskriv alla permutationer som ingår i H. Bestäm även inversen till varje permutation.

3. Låt $\langle G, *\rangle$ vara en grupp med $|G| \geq 2$ och $c \in G$ ett element sådant att $c \neq e$, där e betecknar det neutrala elementet i G. Definiera mängden H genom
   $$H = \{g \in G : c * g = g * c\}\,.$$
   Visa att $\langle H, *\rangle$ är en undergrupp till $\langle G, *\rangle$. (Om du löser uppgiften under antagandet att G är en ändlig grupp får du 3 p).

4. Låt G vara en grupp med $|G| = p^2$, där $p > 1$ och p är ett primtal. Visa att G är icke-cyklisk om och endast om $a^p = e$ för varje element $a \in G$. (Här betecknar e det neutrala elementet i G).

5. Bestäm det minsta antalet färger som behövs för att åstadkomma 200 olika färgläggningar av sidorna på ett liksidigt triangulärt prisma (se figuren nedan), då färgläggningar som kan överföras på varandra genom rotation i symmetriaxlar betraktas som lika. (Prismat har två sidor som är liksidiga trianglar och tre sidor som är rektangulära).



Elementär gruppteori, kurstentamen 25.10.2018, förslag till lösningar.

1) Se föreläsningsanteckningar

2) a) $g \in S_9$

$$\underline{\underline{g}} = (1358)(243)(6879)(721) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\underline{\underline{= (196)(23)(4587)}}\,.$$

b) $H = \langle(1346)\rangle$ i S_6.

Cykliskt genererad undergrupp: Sätt $g = (1346) \in S_6$

$$g_0 = g^0 = e = (1)$$
$$g_1 = g^1 = (1346) = g$$
$$g_2 = g^2 = g \circ g = (1346)(1346) = (14)(36)$$
$$g_3 = g^3 = g \circ g^2 = (1346)(14)(36) = (1643)$$
$$\left(g^4 = g \circ g^3 = (1346)(1643) = (1) = e \right)$$

$$|\langle(1346)\rangle| = \text{ordningen för } g = 4$$

$$\therefore\ \underline{H = \{e, g, g_2, g_3\}}$$

$$\underline{e^{-1} = e}$$

$\underline{g^{-1} = g_3}$ och $\underline{g_3^{-1} = g}$, ty $g \circ g_3 = g_3 \circ g = e$

$\underline{g_2^{-1} = g_2}$, ty $g_2 \circ g_2 = g^4 = e$

3) $\langle G, * \rangle$ grupp, $c \in G$, e neutralt element i G.

$$H = \{ g \in G : c * g = g * c \}$$

Visa att $\langle H, * \rangle$ undergrupp till $\langle G, * \rangle$.

__Bevis:__ Bör visa: (1) $H \neq \emptyset$, (2) $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$.

(1) $\underline{H \neq \emptyset}$, ty $c * e = e * c \Rightarrow \underline{e \in H}$.

(2) __Tag $a, b \in H$.__ Då gäller: $\begin{cases} c * a = a * c & (E) \\ c * b = b * c & (F) \end{cases}$

__Visar först att $b^{-1} \in H$.__

$$\begin{aligned} c * e = e * c &\Rightarrow c * (b * b^{-1}) = (b * b^{-1}) * c \\ &\Rightarrow (c * b) * b^{-1} = b * (b^{-1} * c), \text{ (* asso ciativ} \\ &\Rightarrow (b * c) * b^{-1} = b * (b^{-1} * c), \text{ (Förm (F} \\ &\Rightarrow b * (c * b^{-1}) = b * (b^{-1} * c), \text{ (* asso ciativ} \\ &\Rightarrow c * b^{-1} = b^{-1} * c, \text{ (vänster strykn lag i G} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{b^{-1} \in H}}. \end{aligned}$$

__Nu gäller:__

$$\begin{aligned} \underline{c * (a * b^{-1})} &\overset{\text{* associativ i G}}{=} (c * a) * b^{-1} \overset{(E)}{=} (a * c) * b^{-1} \\ &\overset{\text{* associativ}}{=} a * (c * b^{-1}) \overset{b^{-1} \in H}{=} a * (b^{-1} * c) \\ &\overset{\text{* associativ}}{=} \underline{(a * b^{-1}) * c} \end{aligned}$$

__Alltså:__ $\underline{a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H}$.

Punkterna (1) och (2) ger att $\underline{\langle H, * \rangle \text{ undergrupp till } \langle G, * \rangle}$. $\square$

4) Låt G vara en grupp med $|G| = p^2$, där $p > 1$ och p är ett primtal. Visa att G är icke-cyklisk om och endast om $a^p = e$ för varje element $a \in G$.

(i) __Antag att $a^p = e$ för alla $a \in G$.__

Välj godtyckligt $a \in G$. $\mathcal{O}(a)$ = ordningen för a = det minsta heltal $n \geq 1$: $a^n = e$.

__Sats 24:__ $|\langle a \rangle| = \mathcal{O}(a) \leq p$, ty $a^p = e$.

$\therefore$ $\forall a \in G$: $|\langle a \rangle| \leq p < |G|$.

$\therefore$ $\langle a \rangle \neq G$ $\forall a \in G$ och __G är icke-cyklisk__.

(ii) __Antag att G är icke-cyklisk__

__Sats 23:__ (Lagrange) $\forall a \in G$: $|\langle a \rangle|$ delar $|G|$.

$$\begin{aligned} G \text{ icke-cyklisk} &\Rightarrow |\langle a \rangle| < |G| = p^2 \\ &\Rightarrow \underline{|\langle a \rangle| = 1} \text{ eller } \underline{|\langle a \rangle| = p}. \end{aligned}$$

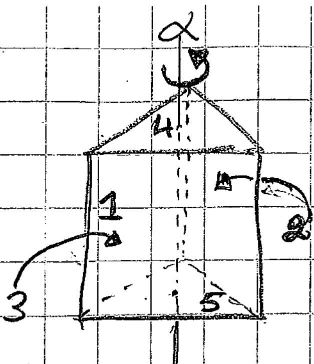
a) Om $a = e$, så gäller $\underline{a^p = e}$.

b) Om $a \neq e$, så innehåller $\langle a \rangle$ elementen e och a, alltså $|\langle a \rangle| > 1$ och då gäller:

$$\left. \begin{array}{l} |\langle a \rangle| = p \\ |\langle a \rangle| = \mathcal{O}(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a^p = e}.$$

$\therefore$ a) och b) ger $\underline{a^p = e \text{ för alla } a \in G}$. $\square$

5



(1 "framsida")

$[4] = \{4, 5\}$, $|[4]| = 2$

$\text{Stab}(4) = \{\text{rot } 0°, \text{rot } 120°, \text{rot } 240° \text{ kring axeln } \alpha\}$

$|\text{Stab}(4)| = 3$

Sats 30: $\underline{\underline{|G|}} = |[4]| \cdot |\text{Stab}(4)| = \underline{\underline{6}}$.

α: symmetriaxel genom sidorna 4 och 5

$h_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_1 = 5$

$h_2 = (1\,2\,3)(4)(5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_2 = 3$

$h_3 = (1\,3\,2)(4)(5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_3 = 3$

β: symmetriaxel genom mittpunkten på sida 1

$h_4 = (1)(2\,3)(4\,5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_4 = 3$

γ: symmetriaxel genom mittpunkten på sida 2

$h_5 = (2)(1\,3)(4\,5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_5 = 3$

δ: symmetriaxel genom mittpunkten på sida 3

$h_6 = (3)(1\,2)(4\,5)$ $\qquad \text{cyc}\,h_6 = 3$

Sats 35: antalet olika färgläggningar k då vi har q st. färger ges av:

$$\underline{\underline{k}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q^{\text{cyc}\,g} = \frac{1}{6}\left(q^5 + 5 \cdot q^3\right)$$

$$= \underline{\frac{q^3}{6}\left(q^2 + 5\right)}$$

q	k
2	12
3	63
$\boxed{4}$	$\boxed{224}$
5	625

Svar: Det krävs åtminstone 4 färger.