Elementär gruppteori, hemuppgifter till torsdag vecka 41

1. Visa att om H är en undergrupp till G med index 2, så är $aH = Ha$ för alla $a \in G$.

2. Låt G vara en grupp av ändlig ordning $|G|$ och låt n beteckna antalet element b i delmängden

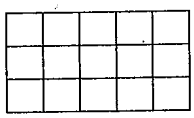
$$H = \{b \in G : b\,a = a\,b \text{ för alla } a \in G\}\,.$$

Undersök om talet n är en heltalsfaktor i talet $|G|$.

3. Betrakta permutationsgruppen $G = \langle(125)(34)\rangle$ på mängden $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm alla G-ekvivalensklasser. Bestäm även fixpunktmängderna X_g för $g \in G$, samt stabilisatormängderna $\mathrm{stab}(x)$ för $x \in X$.

4. En tetraeder T har fyra sidor som är liksidiga trianglar. Sidorna är numrerade $1, 2, 3, 4$. Permutationsgruppen G som svarar mot rotationssymmetrierna för T är en undergrupp av S_4. Bestäm alla permutationer som ingår i G.

5. Antag att vi vill tillverka nycklar av rektangulära (ej kvadratiska) plastbitar som är indelade i ett kvadratiskt 3×5 rutmönster på båda sidorna enligt figuren:



Vi stansar hål i en eller två av rutorna i varje plastbit. Hur många olika nycklar kan konstrueras då nycklar som överförs på varandra genom rotationer och speglingar betraktas som lika?