Elementär gruppteori, hemuppgifter till torsdag vecka 37

1. Bevisa Korollarium 13 i föreläsningarna: För en ändlig grupp G är varje rad och varje kolonn i kompositionstabellen en permutation av gruppens element.

2. Givet en grupp $\langle G, * \rangle$ med $a, b \in G$. Visa först att $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. Visa sedan med induktion att
$$(a_1 * a_2 * ... * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * ... * a_2^{-1} * a_1^{-1}.$$

3. Visa att i en grupp $\langle G, * \rangle$ finns inga andra idempotenta element än det neutrala elementet e. ($x \in G$ är idempotent om $x^2 = x$).

4. Visa att $\langle \mathbf{Z}_n, +_n \rangle$ är en grupp.

5. Visa att mängderna $\mathbf{R}_+$ och $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ är grupper under multiplikation. ($\mathbf{R}_+$ och $\mathbf{C}$ betecknar mängden av positiva reella tal respektive mängden av komplexa tal).

6. Komplettera tabellen nedanom så att operationen $\star$ är kommutativ med neutralt element, och så att varje element har en invers. Representerar den kompletterade tabellen en grupp?

$*$	a	b	c	d
a	c			b
b	d	a		
c				
d				a