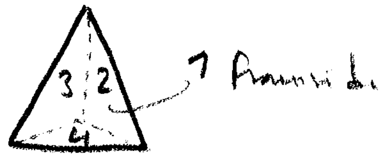
Hemuppgifter vecka 42, lösningsförslag

1] Hur många färgläggningar av en tetraeder kan vi åstadkomma med tio olika färger?



$X = \{1,2,3,4\}$

G = mängden av rotationssymmetrier

Räknade vecka 41 ut: $|G| = 12$

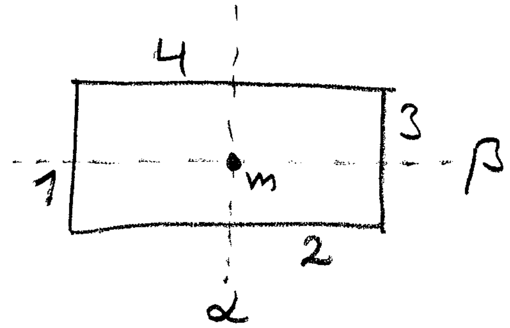
och $G = \{e=(1)(2)(3)(4),\ g_2=(1)(234),\ g_3=(1)(243),\ g_4=(2)(143),\ g_5=(2)(134),\ g_6=(3)(124),\ g_7=(3)(142),\ g_8=(4)(132),\ g_9=(4)(123),\ g_{10}=(14)(23),\ g_{11}=(13)(24),\ g_{12}=(12)(34)\}$

Då ger Sats 35 antalet olika färgläggningar med q färger

$$\underline{\underline{k(q)}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} q^{cyc\, g} = \frac{1}{12}\left(q^4 + 11\cdot q^2\right) = \underline{\underline{\frac{q^2}{12}\left(q^2+11\right)}}$$

q	$k(q)$
2	5
3	15
4	36
5	75
⋮	⋮
10	925 olika färgläggningar.

2.] Beräkna det minsta antal färger som behövs för att på 200 olika sätt färglägga kanterna i en rektangel (som ej är en kvadrat) då man ej skiljer på färgläggningar som via rotationer och speglingar övergår i varandra.



$X = \{1,2,3,4\}$, $G = \{e, g_2, g_3, g_4\} \cong K4$, där

$$\begin{cases} e = (1)(2)(3)(4) \\ g_2 = (13)(2)(4), & \text{spegling kring } \alpha, \quad cyc\, g_2 = 3 \\ g_3 = (1)(24)(3), & \text{— " — } \beta, \quad cyc\, g_3 = 3 \\ g_4 = (13)(24), & \text{rotation } 180^\circ \text{ kring } m, \quad cyc\, g_4 = 2 \end{cases}$$

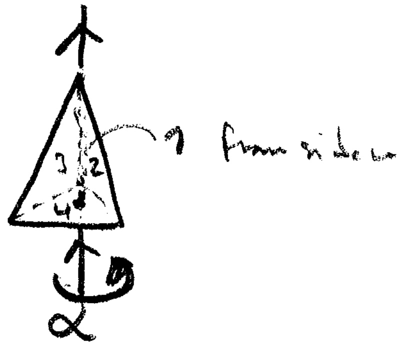
Sats 35 ger antalet sätt att färglägga rektangelns kanter:

$$\underline{\underline{k(q)}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} q^{cyc\, g} = \frac{1}{4}\left(q^4 + 2q^3 + q^2\right) = \underline{\underline{\frac{q^2}{4}\left(q+1\right)^2}}.$$

q	$k(q)$
2	9
3	36
4	100
5	225

Svar: Det krävs minst 5 färger.

3.| I en pyramid är basttriangelns kanter 2cm långa medan de tre övriga kanterna har längden 4 cm. På hur många sätt kan man färglägga sidorna till denna pyramid med 3 färger?



$X = \{1,2,3,4\}$

G = rotationsgruppen med avseende på α. (enda rotationssymmetrierna)

$G = \{e, g_2, g_3\}$ där:

$$\begin{cases} e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4), \text{ rot } 0^\circ, \text{ cyc } e = 4 \\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)(4), \text{ rot } 120^\circ, \text{ cyc } g_2 = 2 \\ g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)(4), \text{ rot } 240^\circ, \text{ cyc } g_3 = 2 \end{cases}$$

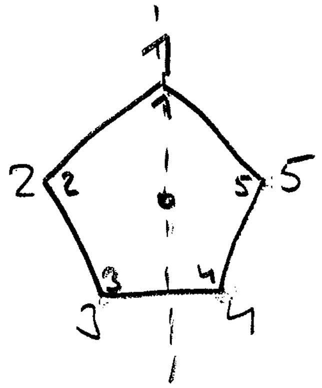
Antalet färgläggningar enligt Sats 35 med q färger:

$$K(q) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} q^{\text{cyc}\, g} = \frac{1}{3}(q^4 + 2q^2) = \frac{q^2}{3}(q^2+2)$$

q	$K(q)$
2	8
3	33
4	96
5	225
6	456
⋮	⋮

Svar: 33 olika färgläggningar med 3 färger.

4.| På hur många sätt kan man färglägga hörnen i en regelbunden femhörning med sex olika färger?



G = Diedergruppen D_5, $|G| = 2\cdot 5 = 10$

$G = \{R^n, S_p \circ R^n, n = 0,\dots,4\}$, $\begin{cases} R = \text{rotation } 72^\circ \text{ grader moturs.} \\ S_p = \text{spegling i diagonal genom läge 1.} \end{cases}$

$g_1 = e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\text{cyc}\, g_1 = 5$
$g_2 = R = (1\,2\,3\,4\,5)$	$\text{cyc}\, g_2 = 1$
$g_3 = R^2 = (1\,3\,5\,2\,4)$	$\text{cyc}\, g_3 = 1$
$g_4 = R^3 = (1\,4\,2\,5\,3)$	$\text{cyc}\, g_4 = 1$
$g_5 = R^4 = (1\,5\,4\,3\,2)$	$\text{cyc}\, g_5 = 1$
$g_6 = S_p = (1)(2\,5)(3\,4)$	$\text{cyc}\, g_6 = 3$
$g_7 = R\circ S_p = (1\,2)(3\,5)(4)$	$\text{cyc}\, g_7 = 3$
$g_8 = R^2\circ S_p = (1\,3)(2)(4\,5)$	$\text{cyc}\, g_8 = 3$
$g_9 = R^3\circ S_p = (1\,4)(2\,3)(5)$	$\text{cyc}\, g_9 = 3$
$g_{10} = R^4\circ S_p = (1\,5)(2\,4)(3)$	$\text{cyc}\, g_{10} = 3$

Sats 35: Antal olika färgläggningar med q färger

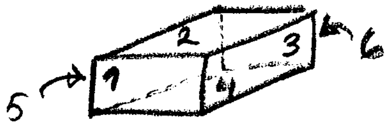
$$K(q) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} q^{\text{cyc}\, g} = \frac{1}{10}(q^5 + 5\cdot q^3 + 4q)$$

$$= \frac{q}{10}(q^2+1)(q^2+4)$$

q	$K(q)$
2	8
3	39
4	136
5	377
6	888
⋮	⋮

Svar: 888 olika färgläggningar med 6 olika färger.

5.] Rätblock av dimension $1 \times 2 \times 3$.



Kortsidor : 1, 6
"golv" : 4
"tak" : 2
långsidor : 3, 5

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Om vi har en symmetriaxel genom mittpunkterna på sidorna 2 och 4, så kan sida 1 roteras till sida 6.

$\therefore$ $\underline{[1]} = \{1, 6\}$, G-ekvivalensklassen för sida 1.

Betrakta symmetriaxel α genom mittpunkterna på sida 1 och 6.

$\therefore$ $\underline{\mathrm{Stab}(1)} = \{\mathrm{rot}\,0^\circ, \mathrm{rot}\,180^\circ$ kring axel $\alpha\}$.

Sats 30: $|G| = |[1]| \cdot |\mathrm{Stab}(1)| = 2 \cdot 2 = 4$. G undergrupp av S_6.

1°) Axel α genom sidorna 1 och 6:

rot 0°: $g_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$, $\quad \mathrm{cyc}\, g_1 = 6$

rot 180°: $g_2 = (1)(24)(35)(6)$, $\quad \mathrm{cyc}\, g_2 = 4$

2°) Axel β genom sidorna 2 och 4:

rot 180°: $g_3 = (16)(2)(35)(4)$, $\quad \mathrm{cyc}\, g_3 = 4$

3°) Axel γ genom sidorna 3 och 5:

rot 180°: $g_4 = (16)(24)(3)(5)$ $\quad \mathrm{cyc}\, g_4 = 4$

$\therefore$ Sats 35: $K(q) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q^{\mathrm{cyc}\, g} = \frac{1}{4}(q^6 + 3q^4) = \frac{q^4}{4}(q^2 + 3)$

q	$K(q)$
2	28
3	243
4	1216
5	4375

Svar: Det krävs minst 4 färger för att åstadkomma 250 olika färgläggningar.