Hemuppgifter v. 41, lösningsförslag

1.) Visa att om H är en undergrupp till G med index 2, så är $aH=Ha$ för alla $a\in G$.

$$|G| = \underbrace{|G/H|}_{\text{index}}\cdot|H| = 2\cdot|H|.$$

1°) $a\in H$: $aH=\{ah : h\in H\}$.

$e\in H \Rightarrow a\cdot e = a\in aH$.

$\therefore\ aH\cap H\neq\emptyset \Rightarrow aH=H.$

$Ha=\{ha : h\in H\}$

$e\in H \Rightarrow ea = a\in Ha \Rightarrow Ha\cap H\neq\emptyset \Rightarrow Ha=H$.

$\therefore\ aH = H = Ha$.

2°) $a\notin H$: $a=\underbrace{ae}_{\in aH}\notin H \Rightarrow aH\cap H=\emptyset \xRightarrow{\text{index } 2} G=H\cup aH$

$a=\underbrace{ea}_{\in Ha}\notin H \Rightarrow Ha\cap H=\emptyset \Rightarrow G=H\cup Ha$

$\therefore\ aH=Ha\ \ \forall a\notin H$.

$\therefore$ 1°) och 2°) ger $aH=Ha\ \ \forall a\in G$. □

2.) G grupp av ändlig ordning $|G|$. Antalet element ~~b~~ i delmängden

$$H=\{b\in G : ba=ab \text{ för alla } a\in G\}$$

är n. Undersök om n delar $|G|$.

Vi visar att H är en undergrupp till G. Då ger Sats 23 att n delar $|G|$. Använder Sats 18:

1) $H\neq\emptyset$, ty $ea=a=ae$ för alla $a\in G$, så $e\in H$.

2) Tag $b,c\in H$. Då gäller för varje $a\in G$: $ba=ab$ och $ca=ac$.

$$\therefore\ (bc)a = b(ca) = b(ac) = (ba)c = (ab)c = a(bc)$$

$\therefore\ bc\in H$.

Då är H en undergrupp av G och n delar $|G|$.

3.) $X=\{1,2,3,4,5\}$ och $G=\langle(125)(34)\rangle$.

1°) Permutationerna i G:

$$g^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}=(1\,2\,5)(3\,4)$$

$$g^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&4&2\end{pmatrix}=(152)(3)(4)$$

$$g^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}=(1)(2)(34)(5)$$

$$g^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&4&1\end{pmatrix}=(125)(3)(4)$$

$$g^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix}=(152)(34)$$

$$g^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=(1)=e$$

3.| (forts.)

2°) G-ekvivalensklasserna: $[1]=\{1,2,5\}=[2]=[5]$

$[3]=\{3,4\}=[4]$

$\therefore$ $X=[1]\cup[3]$.

3°) Fixpunktmängderna: $X_h=\{x\in X: h(x)=x\}$

$X_g=\{x\in X: g(x)=x\}=\emptyset$, $X_{g^2}=\{3,4\}$,

$X_{g^3}=\{1,2,5\}$, $X_{g^4}=\{3,4\}=X_{g^2}$

$X_{g^5}=\emptyset=X_g$, $X_{g^6}=\{1,2,3,4,5\}=X$.

4°) Stabilisatormängderna: $\text{Stab}(x)=\{g \in G: g(x)=x\}$

$\text{Stab}(1)=\{e,g^3\}$, $\text{Stab}(2)=\{e,g^3\}=\text{Stab}(1)$

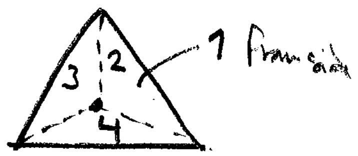
$\text{Stab}(3)=\{e,g^2,g^4\}$, $\text{Stab}(4)=\{e,g^2,g^4\}=\text{Stab}(3)$

$\text{Stab}(5)=\{e,g^3\}=\text{Stab}(1)=\text{Stab}(2)$.

4.| En tetraeder T har fyra sidor som är liksidiga trianglar. Sidorna är numrerade 1,2,3,4. Permutationsgruppen G som svarar mot rotationssymmetrierna för T är en undergrupp av S_4. Bestäm alla permutationer i G.

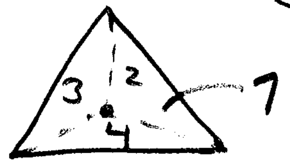
$X=\{1,2,3,4\}$, G = mängden av rot. symmetrier,

Sida 1 kan roteras till de övriga sidorna genom att välja lämpliga symmetriaxlar som går genom hörn och mittpunkt på motstående sida.



$\therefore$ $[1]=\{1,2,3,4\}=X$. $|[1]|=4$.

4.| (forts.) Låt α vara axeln genom mittpunkten på sida 1 och hörnet gemensamt för sidorna 2,3,4.



$\text{Stab}(1)=\{\text{rot } 0°, \text{rot } 120°, \text{rot } 240°\}$ kring axeln α.

Sats 30: $|G|=|[1]|\cdot|\text{Stab}(1)|=4\cdot 3=12$.

Rotation kring α: $\begin{cases} e=(1)(2)(3)(4) \\ g_2=(1)(234) \\ g_3=(1)(243) \end{cases}$

Rotation kring β genom mittpunkt på sida 2 och hörnet gemensamt för sidorna 1,3,4:

$\begin{cases} g_4=(2)(143) \\ g_5=(2)(134) \end{cases}$

Rotation kring γ genom mittpunkt på sida 3 och hörnet gemensamt för sidorna 1,2,4:

$\begin{cases} g_6=(3)(124) \\ g_7=(3)(142) \end{cases}$

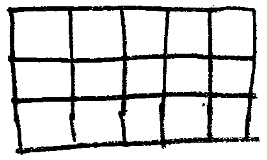
Rotation kring δ genom mittpunkt på sida 4 och hörnet gemensamt för sidorna 1,2,3:

$\begin{cases} g_8=(4)(132) \\ g_9=(4)(123) \end{cases}$

$\therefore$ Fattas 3 permutationer: $\begin{cases} g_{10}=g_2\circ g_5=(14)(23) \\ g_{11}=g_2\circ g_9=(13)(24) \\ g_{12}=g_5\circ g_6=(12)(34) \end{cases}$

$\therefore$ $G=\{e,g_2,\dots,g_{12}\}$

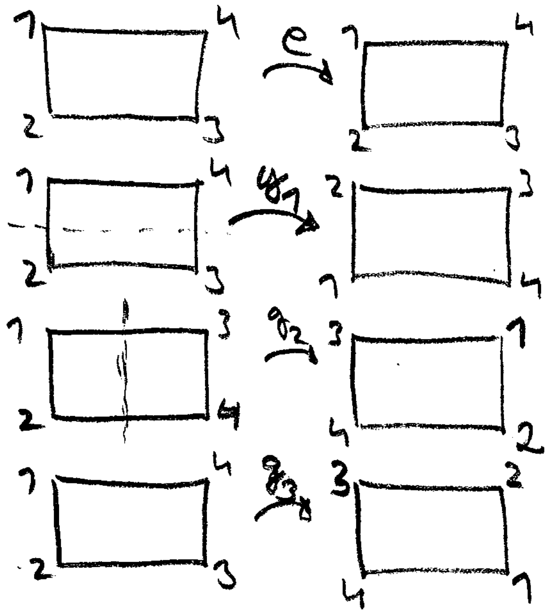
5.) Tillverkar nycklar av rektangulära plastbitar: (5)



Stanser hål i en eller två rutor. Hur många olika nycklar kan konstrueras då nycklar som överförs på varandra genom rotationer och speglingar betraktas som lika?

1°) <u>Stanser ett hål.</u> X = mängden av konfigurationer. $|X| = 15$.

Vi har fyra symmetrier för plastbiten:



$e = (1)$

$g_1 = (12)(34)$ (spegling i "x-axeln")

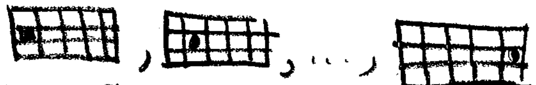
$g_2 = (13)(24)$ (spegling i "y-axeln")

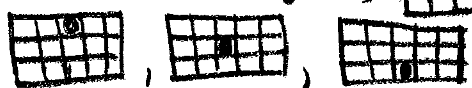
$g_3 = (13)(24)$ (spegling i "origo" rot 180°)

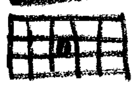
$\langle \{e, g_1, g_2, g_3\}, \circ \rangle$ <u>undergrupp</u> G av S_4, (t.ex. med Sats 18), och <u>isomorf med Kleins fyrgrupp</u>.

Bestämmer $|X_g|$ för alla $g \in G$. $X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$

a) $g = e$: $|X_e| = 15$, alla konfigurationer fixerade.

b) $g = g_1$: $|X_{g_1}| = 5$, 

c) $g = g_2$: $|X_{g_2}| = 3$, 

d) $g = g_3$: $|X_{g_3}| = 1$ 

∴ Sats 32: $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{4}(15+5+3+1) = 6$ = antal G-ekvivalensklasser = antalet olika nycklar med ett hål

5.) (forts.) 2°) <u>Stanser två hål</u>: (6)

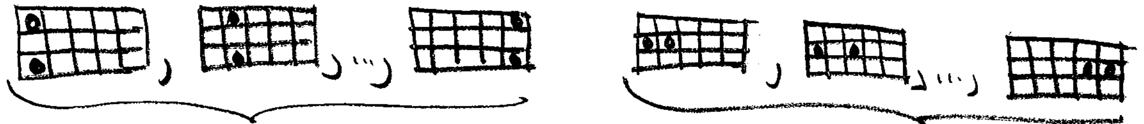
$X = \{\text{konfigurationer med två hål}\}$

Två hål kan stansas på $\binom{15}{2} = 105$ sätt. $|X| = 105$

Samma symmetrigrupp G som i fall 1°).

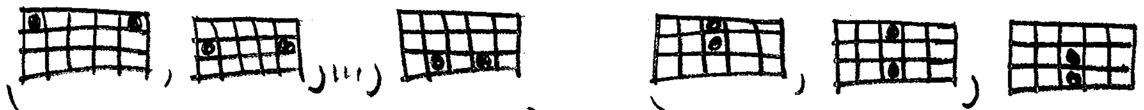
$g = e$: $|X_e| = 105$, alla konfigurationer fixa.

$g = g_1$: $|X_{g_1}| = 5 + 10 = 15$



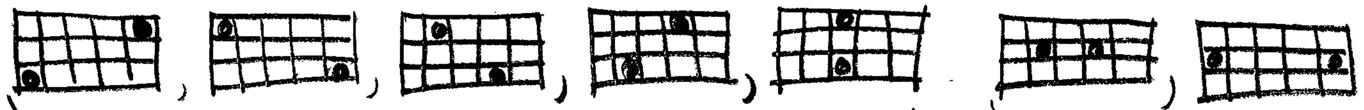
5 st $\quad \binom{5}{2} = 10$ st.

$g = g_2$: $|X_{g_2}| = 6 + 3 = 9$



6 st. $\quad$ 3 st.

$g = g_3$: $|X_{g_3}| = 5 + 2 = 7$



5 st. $\quad$ 2 st.

∴ $k = \frac{1}{4}(105 + 15 + 9 + 7) = 34$

∴ 1°) och 2°) ger att vi har $6 + 34 = 40$ olika nycklar då vi får stansa ett eller två hål i plastbitarna.