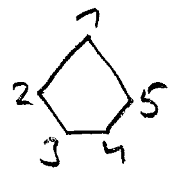
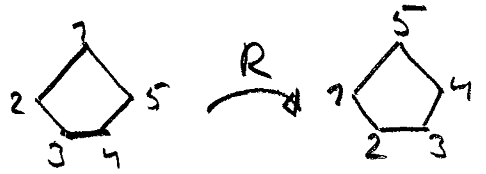
Hemuppgifter v.40, lösningsförslag

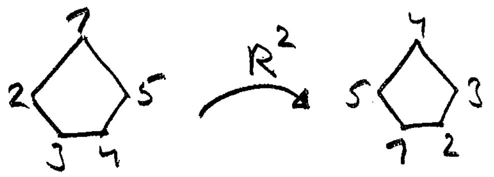
1] Permutationerna i $D_5 \subset S_5$ för $k = 0, 1, 2$,

$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $S_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

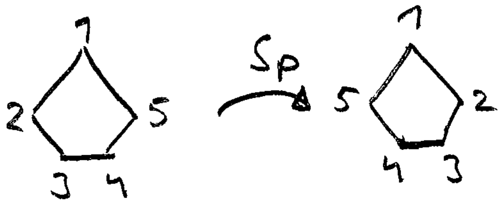


$= R^0 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)$.



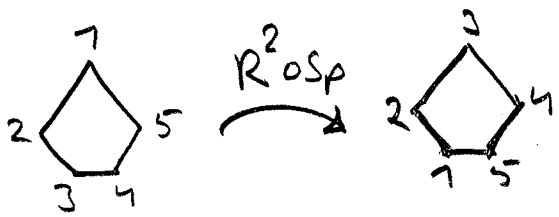


$\therefore R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,2\,4)$.



$\therefore S_p = R^0 \circ S_p$

$\therefore R \circ S_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,5)(4)$.



$\therefore R^2 \circ S_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3)(2)(4\,5)$

2] Ange ordningen för varje element i $\langle Z_{12}, +_{12} \rangle$. Vilka element kan väljas som generator för hela gruppen?

Sats 21: $\langle G, * \rangle$ ändlig grupp, $e \neq a \in G$.
Ordningen för a minsta pos. heltal så att $a^n = e$.
$n = |\langle a \rangle|$.

$Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

a	ordningen för a
0	$0^1 = 0 \Rightarrow \theta(0) = 1$
1	$1^{12} = 0 \Rightarrow \theta(1) = 12$
2	$2^6 = 0 \Rightarrow \theta(2) = 6$
3	$3^4 = 0 \Rightarrow \theta(3) = 4$
4	$4^3 = 0 \Rightarrow \theta(4) = 3$
5	$5^{12} = 0 \Rightarrow \theta(5) = 12$
6	$6^2 = 0 \Rightarrow \theta(6) = 2$
7	$7^{12} = 0 \Rightarrow \theta(7) = 12$
8	$8^3 = 0 \Rightarrow \theta(8) = 3$
9	$9^4 = 0 \Rightarrow \theta(9) = 4$
10	$10^6 = 0 \Rightarrow \theta(10) = 6$
11	$11^{12} = 0 \Rightarrow \theta(11) = 12$

Då $\theta(a)$ = antalet element som genereras av a gäller det att om $\theta(a) = 12$ så är $\langle a \rangle = Z_{12}$.

$\therefore$ Z_{12} genereras av 1, 5, 7 och 11.

Exempelvis:

$5^1 = 5$
$5^2 = 5 +_{12} 5 = 10$
$5^3 = 10 +_{12} 5 = 3$
$5^4 = 3 +_{12} 5 = 8$
$5^5 = 8 +_{12} 5 = 1$
$5^6 = 1 +_{12} 5 = 6$
$5^7 = 6 +_{12} 5 = 11$
$5^8 = 11 +_{12} 5 = 4$
$5^9 = 4 +_{12} 5 = 9$
$5^{10} = 9 +_{12} 5 = 2$
$5^{11} = 2 +_{12} 5 = 7$
$5^{12} = 7 +_{12} 5 = 0$

(3)

3.| Bestäm vänstersidoklasserna till undergruppen $H = \langle 3 \rangle$ till $\mathbb{Z}_6$.

$\underline{H} = \langle 3 \rangle = \underline{\{0, \underset{3^{-1}}{\overset{\shortparallel}{3}}\}}$ undergrupp till $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ med avseende på $+_6$.

Sats 18: $(H \neq \emptyset$ och H sluten under $+_6) \Rightarrow H$ undergrupp

$\forall a \in \mathbb{Z}_6 : aH = \{ah : h \in H\}$, vänstersidoklasserna.

$0H = \{0 +_6 h : h \in H\} = \{0, 3\} = H$

$1H = \{1 +_6 h : h \in H\} = \{1, 4\}$

$2H = \{2 +_6 h : h \in H\} = \{2, 5\}$

$3H = \{3 +_6 h : h \in H\} = \{3, 0\} = H$

$4H = \{4 +_6 h : h \in H\} = \{4, 1\} = 1H$

$5H = \{5 +_6 h : h \in H\} = \{5, 2\} = 2H$

Vänstersidoklasserna att bildar en partition av $\mathbb{Z}_6$:

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}_6 = H \cup 1H \cup 2H}}.$$

(4.)

4.| I en grupp G har alla element utom det neutrala ordningen 3. Visa att
$(ba)^2 = a^2 b^2$ för alla $a, b \in G$.

a) $(ba)^2(ba) = (\underbrace{ba}_{\in G})^3 = e$, (gäller även om $ba = e$)

b) $(a^2 b^2)(ba) = a^2 \underbrace{(b^3)}_{\substack{= e \\ (\text{även om } b = e)}} a = a^3 = e$, (även om $a = e$)

$\therefore$ a) och b) ger: $(ba)^2(ba) = (a^2 b^2)(ba)$

$\underset{\text{Strykningslagen}}{\Longrightarrow}$ $\underline{(ba)^2 = a^2 b^2}$, $\underline{\text{för alla } a, b \in G.}$ □

5.| Visa att om G är Abelsk och H undergrupp till G, så sammanfaller vänster- och höger-sidoklasserna till H.

Antag att G abelsk och H undergrupp till G.

$\forall a \in G$: $b \in aH \Leftrightarrow b = ah$ för något $h \in H$

(G abelsk) $\Leftrightarrow b = ha$ ″

$\Leftrightarrow b \in Ha$.

$\therefore$ $\underline{aH = Ha \text{ för alla } a \in G}$. □

(5)

6.) Är $\mathbb{Z}_9$ isomorf med en undergrupp till S_4?

Vi har att $|\mathbb{Z}_9| = 9$ och $|S_4| = 4! = 24$.

Antag H undergrupp till S_4. Om $\mathbb{Z}_9 \cong H$ så måste $|H| = 9$ gälla.

Sats 23: (Lagrange) Om H är undergrupp till ändlig grupp G, så är $|G|$ delbar med $|H|$.

Då 9 inte delar 24, så kan $\mathbb{Z}_9$ inte vara isomorf med en undergrupp till S_4.

7.) Antag att $a, b \in G$, en grupp av ordning 8 med neutralt element e. Visa att om $a^3 b = b a^2$ så är $a = e$.

Bevis: Antag att $|G| = 8$, $a, b \in G$ och $a^3 b = b a^2$.

Antites: Antag att $a \neq e$.

$\therefore$ Då är $o(a) = 2 \vee o(a) = 4 \vee o(a) = 8$, ty $o(a)$ delar $|G|$, Sats 24.

a) $o(a) = 2$: $a^3 b = b a^2 \Rightarrow a a^2 b = b a^2 \Rightarrow ab = be$
$\Rightarrow ab = eb \Rightarrow a = e$ ⚡

b) $o(a) = 4$: $a^3 b = b a^2 \Rightarrow a^3 b a^2 = b a^4 = be \Rightarrow a^6 b = eb$
$\Rightarrow a^6 = e \Rightarrow a^4 \cdot a^2 = e \Rightarrow e \cdot a^2 = e \Rightarrow a^2 = e$ ⚡

c) $o(a) = 8$: $a^3 b = b a^2 \Rightarrow a^3 b a^6 = b a^8 = be \Rightarrow a^6 b a^4 = b \cdot e$
$\Rightarrow a^9 b a^2 = b \cdot e \Rightarrow a^{12} b = eb$
$\Rightarrow a^{12} = e \Rightarrow a^8 \cdot a^4 = e \Rightarrow a^4 = e$ ⚡

$\therefore$ a), b), c) ger att antitesen är falsk, och $a = e$. □