Hemuppgifter v. 39, lösningsförslag

1.) Avgör om $Z_6 \cong Z_2 \times Z_3$ gäller.

$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, $Z_2 \times Z_3 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$

Försöker hitta en bijektion $\varphi : Z_6 \to Z_2 \times Z_3$ sådan att:

(F) $\varphi(a +_6 b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, där $(a_1,b_1) * (a_2,b_2) = (a_1 +_2 a_2, b_1 +_3 b_2)$.

Kompositionstabeller:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$*$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_0
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_0	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	a_0	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_0	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

Namnger element i $Z_2 \times Z_3$ $a_0,\dots,a_5$ så att vi får tabellen ovan:

$a_0 = (0,0) = \varphi(0)$ $\quad a_3 = (1,0) = \varphi(3)$
$a_1 = (1,1) = \varphi(1)$ $\quad a_4 = (0,1) = \varphi(4)$
$a_2 = (0,2) = \varphi(2)$ $\quad a_5 = (1,2) = \varphi(5)$

Då är φ en bijektion som uppfyller (F), dvs. en isomorfism och $Z_6 \cong Z_2 \times Z_3$. □

2.) $Z = \langle Z, + \rangle$. Visa att $Z \times Z$ ej är cyklisk.

Antites: Antag att $Z \times Z = \{(\alpha,\beta)^k, k \in Z\}$ (cyklisk), $\alpha,\beta \in Z$

Då finns bl.a. $k_1, k_2 \in Z \setminus \{0\}$: $\begin{cases}(0,1) = (\alpha,\beta)^{k_1}, \\ (1,0) = (\alpha,\beta)^{k_2}.\end{cases}$

1°) $k_1 > 0$: $(0,1) = (\alpha,\beta) + (\alpha,\beta)^{k_1 - 1} = \dots = (k_1 \cdot \alpha, k_1 \cdot \beta)$
$\Rightarrow (k_1 \cdot \alpha = 0 \wedge k_1 \cdot \beta = 1) \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$

$k_1 < 0$: $(0,1) = [(\alpha,\beta)^{-1}]^{-k_1} = (-\alpha,-\beta)^{-k_1} = (-\alpha\cdot(-k_1), -\beta\cdot(-k_1))$
$\Rightarrow (k_1 \cdot \alpha = 0 \wedge k_1 \cdot \beta = 1) \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$

2°) $k_2 > 0$: $(1,0) = \dots = (k_2 \cdot \alpha, k_2 \cdot \beta) \Rightarrow \alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$

$k_2 < 0$: $(1,0) = \dots = ((-k_2)\cdot(-\alpha), (-k_2)(-\beta)) \Rightarrow \alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$

$\therefore$ 1°) och 2°) ger motsägelse, $Z \times Z$ ej cyklisk.

Kan $Z \times Z \cong Z$ gälla?

Svar: Nej, ty $\langle Z, + \rangle$ är cyklisk, $Z = \{1^k, k \in Z\}$, och med stöd av hemuppgift v.38 borde då även $Z \times Z$ vara cyklisk om $Z \times Z \cong Z$, så $Z \times Z \not\cong Z$.

3.) Visa att $G_1 \times G_2$ Abelsk $\Leftrightarrow$ G_1 Abelsk och G_2 Abelsk.

Tag godtyckliga $a, c \in \langle G_1, * \rangle$ och $b, d \in \langle G_2, \circ \rangle$. Låt $G_1 \times G_2$ ha operation $\diamond$. Då gäller:

$$(a,b) \diamond (c,d) = (c,d) \diamond (a,b)$$

$$\Leftrightarrow (a * c, b \circ d) = (c * a, d \circ b)$$

$$\Leftrightarrow \underline{a * c = c * a} \text{ och } \underline{b \circ d = d \circ b}.$$

$\therefore$ $G_1 \times G_2$ Abelsk $\Leftrightarrow$ G_1 Abelsk och G_2 Abelsk. □

4.) $\langle G, * \rangle$ grupp och $H \subseteq G$. Visa att

$$\langle H, * \rangle \text{ undergrupp} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. & H \neq \emptyset, \\ 2. & a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H. \end{cases}$$

Bevis: 1°) Antag att $\langle H, * \rangle$ undergrupp till $\langle G, * \rangle$.

$\therefore$ H har ett neutralt element e, så $H \neq \emptyset$.

$\therefore$ $a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow \underline{a * b^{-1} \in H}$. (Varje element b i H har invers i H. H sluten under $*$)

2°) Antag att $\underbrace{H \neq \emptyset}_{a)}$ och $\underbrace{a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H}_{b)}$

a) och b) $\Rightarrow$ $\exists\, x \in H$ och $x * x^{-1} = \underline{e \in H}$.

$e, x \in H \overset{b)}{\Rightarrow} e * x^{-1} = \underline{x^{-1} \in H}$

$a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \overset{b)}{\Rightarrow} a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$,

så H är sluten under $*$.

$*$ associativ i H eftersom $H \subseteq G$.

$\therefore$ $\langle H, * \rangle$ är en undergrupp av $\langle G, * \rangle$.

5.) $G = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0, a, b \in \mathbb{R} \} \subseteq GL(2, \mathbb{R})$,

ty $\det A = a \cdot 1 - b \cdot 0 = a \neq 0$ för alla $A \in G$, dvs. varje matris i G är inverterbar.

Använder Sats 17 för att visa att $\langle G, \cdot \rangle$, med $\cdot$ = matrismultiplikation, är en undergrupp till $GL(2, \mathbb{R})$.

1) Klart att $\underline{G \neq \emptyset}$.

2) Tag $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$a \neq 0, c \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & d/c & 1/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[+(-\frac{d}{c}) \cdot \text{rad } 2]{\text{rad } 1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/c & -d/c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, ty $\frac{1}{c} \neq 0$, $\frac{1}{c} \in \mathbb{R}$, $-\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$,

Nu är $A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & -\frac{ad}{c} + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Då $\frac{a}{c} \neq 0$, $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, $-\frac{ad}{c} + b \in \mathbb{R}$ har vi att

$\underline{A \cdot B^{-1} \in G}$.

Sats 17: G är en undergrupp av $GL(2, \mathbb{R})$. □

6. H_i undergrupp till G_i, $i=1,2$. Visa att $H_1 \times H_2$ är en undergrupp till $G_1 \times G_2$. ($\langle G_1, * \rangle$, $\langle G_2, \bullet \rangle$ $\langle G_1 \times G_2, \diamond \rangle$)

Bevis: Sats 17 ger att $H_1 \neq \emptyset$, $H_2 \neq \emptyset$ och

$$\begin{cases} a, b \in H_1 \Rightarrow a * b^{-1} \in H_1, \\ c, d \in H_2 \Rightarrow c \bullet d^{-1} \in H_2. \end{cases}$$

Då får vi att $H_1 \times H_2 \neq \emptyset$ och för $(a,c), (b,d) \in H_1 \times H_2$:

$$(a,c) \diamond (b,d)^{-1} = (a,c) \diamond (b^{-1}, d^{-1})$$
$$= (\underbrace{a * b^{-1}}_{\in H_1}, \underbrace{c \bullet d^{-1}}_{\in H_2}) \in H_1 \times H_2$$

Sats 17: $\langle H_1 \times H_2, \diamond \rangle$ undergrupp av $\langle G_1 \times G_2, \diamond \rangle$. □

7. Visa att $R^k \circ S_p = S_p \circ R^{-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$k=0$: $R^0 \circ S_p = e \circ S_p = S_p = S_p \circ e = S_p \circ R^0$ ✓.

$k=1$: $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

$S_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$(*)\ R \circ S_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 1 & n & \ldots & 4 & 3 \end{pmatrix} = S_p \circ R^{-1} \ ✓.$$

Antag att påståendet gäller för $1 \le k \le n-2$. (ia)

$$R^{k+1} \circ S_p = R \circ (R^k \circ S_p) \overset{(ia)}{=} R \circ (S_p \circ R^{-k})$$
$$= (R \circ S_p) \circ R^{-k} \overset{(*)}{=} (S_p \circ R^{-1}) \circ R^{-k}$$
$$= S_p \circ R^{-(k+1)}.$$

Induktion ger att:

$$R^k \circ S_p = S_p \circ R^{-k} \text{ gäller för } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$ □