Hemuppgifter Vecka 38, lösningsförslag

1.] Visa att i en Abelsk grupp gäller $(a*b)^n = a^n * b^n$, där n är ett heltal.

$1^\circ)$ $\underline{n=0}$: $(a*b)^0 = e = a^0 * b^0$ ✓

$\underline{n=1}$: $(a*b)^1 = a*b = a^1 * b^1$ ✓

$\underline{n=k\geq 1}$: Ind. ant. $(a*b)^k = a^k * b^k$.

$$\underline{(a*b)^{k+1}} \overset{\text{def.}}{=} (a*b)*(a*b)^k \overset{\text{i.a.}}{=} (a*b)*(a^k * b^k)$$
$$= a*(b*a^k)*b^k \overset{\text{Abelsk}}{=} a*(a^k*b)*b^k$$
$$= (a*a^k)*(b*b^k) = \underline{a^{k+1}*b^{k+1}}.$$

Induktion ger att formeln gäller för $n\geq 0$.

$2^\circ)$ $\underline{n<0}$: $\underline{(a*b)^n} = (a*b)^{-|n|} = ((a*b)^{-1})^{|n|}$
$$= (b^{-1}*a^{-1})^{|n|} \underset{\text{Abelsk}}{=} (a^{-1}*b^{-1})^{|n|}$$
$$\overset{1^\circ}{=} (a^{-1})^{|n|} * (b^{-1})^{|n|} = a^{-|n|}*b^{-|n|}$$
$$= \underline{a^n * b^n}.$$

$\therefore$ $\underline{(a*b)^n = a^n * b^n,\ \forall n\in\mathbb{Z}}$, i en Abelsk grupp. ☐

2.] $G = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a*b = a+b+a\cdot b$.

Får anta att $\langle G, *\rangle$ Algebraisk struktur, ($*$ operation).

(i) Tag $a,b,c\in G$:

$$\underline{a*(b*c)} = a*(b+c+b\cdot c)$$
$$= a+(b+c+b\cdot c)+a\cdot(b+c+b\cdot c)$$
$$= a+b+c+ab+ac+bc+abc$$
$$= (a+b+a\cdot b)+c+c\cdot(a+b+a\cdot b)$$
$$= (a+b+a\cdot b)*c$$
$$= \underline{(a*b)*c}.$$

$\therefore$ $\underline{*\text{ associativ}}$.

(ii) $0\in G$ $\underline{\text{neutralt element}}$, ty $\forall a\in G$:

$$\begin{cases} a*0 = a+0+a\cdot 0 = a \\ 0*a = 0+a+0\cdot a = a \end{cases}$$

(iii) $\underline{\text{För } a\in G \text{ gäller}}$:

$$a*x = 0 \iff a+x+ax=0 \iff x(1+a) = -a \iff x = \frac{-a}{1+a}\in G.$$
$$x*a = 0 \iff x+a+x\cdot a = 0 \iff x = \frac{-a}{1+a}\in G.$$

$\therefore$ $\underline{\forall a\in G: a^{-1} = -\frac{a}{1+a}\in G}$, $\left(-\frac{a}{1+a}\neq -1\right)$

$\therefore$ $\underline{\langle G,*\rangle \text{ är en grupp}}$. ☐

3.] Skriv följande permutationer som en produkt av disjunkta cykler.

a) $(13)(257)(385) =$

$$= \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&2&1&4&5&6&7&8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&5&3&4&7&6&2&8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&2&8&4&3&6&7&5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&2&1&4&5&6&7&8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&5&8&4&3&6&2&7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&5&8&4&1&6&2&7 \end{pmatrix}$$

$$= (138725)(4)(6) = \underline{(138725)}$$

b) $(12345)(67)(1357)(163) =$

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 2&3&4&5&1&6&7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&2&3&4&5&7&6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 3&2&5&4&7&6&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 6&2&1&4&5&3&7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 2&3&4&5&1&7&6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 6&2&3&4&7&5&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 7&3&4&5&6&1&2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(1723456)}$$

c) $(31)(42)(523) = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&2&1&4&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&4&3&2&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&3&5&4&2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&2&1&4&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&3&5&2&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&1&5&2&4 \end{pmatrix} = \underline{(13542)}.$$

d) $(145)(1235)(13) =$

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 4&2&3&5&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 2&3&5&4&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&2&1&4&5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 4&2&3&5&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&3&2&4&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&3&2&5&4 \end{pmatrix}$$

$$= (1)(23)(45) = \underline{(23)(45)}.$$

4.] Visa att $\langle \mathbb{Z},+\rangle \cong \langle G,\cdot\rangle$, $G = \{2^m : m \in \mathbb{Z}\}$.

Definiera: $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ genom $\varphi(a) = 2^a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

$\therefore \varphi$ surjektiv (avbildning till hela G)

$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow 2^a = 2^b \Leftrightarrow 2^{a-b} = 2^{b-b} = 1$
$\Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

$\therefore \varphi$ injektiv. $\therefore \varphi$ bijektion.

Vidare gäller: $\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$, $\forall a,b \in G$.

$\therefore \varphi$ isomorfism och $\langle \mathbb{Z},+\rangle \cong \langle G,\cdot\rangle$.

5.] $\langle G,*\rangle$, definiera $a\circ b = b*a$ $\forall a,b \in G$.
Visa att $\langle G,\circ\rangle$ grupp och att $\langle G,*\rangle \cong \langle G,\circ\rangle$.

Lösning: $a\circ b \in G$ $\forall a,b \in G$: $\langle G,\circ\rangle$ algebraisk struktur

(i) $a\circ(b\circ c) = a\circ(c*b) = (c*b)*a = c*(b*a) = (b*a)\circ c$
$= (a\circ b)\circ c$, $\therefore \circ$ associativ.

(ii) e neutralt element i $\langle G,*\rangle$: $\forall a\in G$: $\begin{cases} a\circ e = e*a = a \\ e\circ a = a*e = a \end{cases}$

$\therefore e$ neutralt element i $\langle G,\circ\rangle$

(iii) Tag $a, a^{-1} \in \langle G,*\rangle$: $\begin{cases} a\circ a^{-1} = a^{-1}*a = e \\ a^{-1}\circ a = a*a^{-1} = e \end{cases}$

$\Rightarrow a, a^{-1}$ varandras inverser i $\langle G,\circ\rangle$

Definiera: $\varphi : G \to G$ genom $\varphi(x) = x^{-1}$.

$\therefore \varphi$ bijektion, ty varje element har entydigt bestämd invers.

$\forall a,b \in G$: $\varphi(a*b) = (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = a^{-1}\circ b^{-1}$
$= \varphi(a)\circ\varphi(b)$

$\therefore \varphi$ isomorfism, och $\langle G,*\rangle \cong \langle G,\circ\rangle$. $\square$

6.] $\langle G, * \rangle \cong \langle H, \circ \rangle$. Visa att om $\langle G, * \rangle$ är cyklisk så är också $\langle H, \circ \rangle$ cyklisk. (5)

Lösning: $\varphi : G \to H$ isomorfism, bijektion och $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, $\forall a, b \in G$.

G cyklisk $\Rightarrow \exists a \in G : G = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

e_G och e_H neutrala element i G resp. H.

$\therefore \varphi(e_G) \circ e_H = \varphi(e_G) = \varphi(e_G * e_G) = \varphi(e_G) \circ \varphi(e_G)$

$\Rightarrow e_H = \varphi(e_G)$, (Strykningslagen Sats 12(i))

Visar att $\varphi(a^k) = (\varphi(a))^k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

1°) $k > 0$: $\varphi(a^k) = \varphi(a * a^{k-1}) = \varphi(a) \circ \varphi(a^{k-1}) = \ldots$
$= \underbrace{\varphi(a) \circ \varphi(a) \circ \ldots \circ \varphi(a)}_{k \text{ st}} = (\varphi(a))^k$

2°) $k = 0$: $\varphi(a^0) = \varphi(e_G) = e_H = [\varphi(a)]^0$

3°) $k < 0$:

$e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a^k * a^{-k}) = \varphi(a^k) \circ \varphi(a^{-k})$

$\overset{1°}{=} \varphi(a^k) \circ [\varphi(a)]^{-k}$ | Multiplicera yttersta leden med $(\varphi(a))^k$ från höger.

$\Rightarrow e_H \circ (\varphi(a))^k = \varphi(a^k)$

$\Rightarrow \varphi(a^k) = (\varphi(a))^k$.

$\therefore H \subseteq \{(\varphi(a))^k, k \in \mathbb{Z}\}$, ty $x \in H \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \varphi(a^k)$ (G cyklisk, φ surjektiv)

Tag godt. $k \in \mathbb{Z}$: $(\varphi(a))^k = \varphi(a^k) \in H$

$\therefore H = \{(\varphi(a))^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $\therefore \langle H, \circ \rangle$ cyklisk. □