Hemuppgifter v.37, lösningsförslag

1.) Korollarium 13; För en ändlig grupp G är varje rad och varje kolonn i kompositionstabellen en permutation av gruppens element.

$G = \{a_1, \dots, a_n\}$

$$\begin{array}{c|cccc} * & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline a_1 & & & & \\ a_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_n & & & & \end{array}$$

Elementen i rad nr. i är $a_i * a_j$, $j = 1, \dots, n$.

Antites: Antag att rad i inte är en permutation av $a_1, \dots, a_n$.

$\therefore$ $\exists\, a_j$ och $a_l \in G$ så att $a_j \neq a_l$ och

$$\left.\begin{array}{l} a_i * a_j = a_k \\ a_i * a_l = a_k \end{array}\right\} \Rightarrow a_i * a_j = a_i * a_l$$

$$\Rightarrow a_j = a_l \text{ enligt strykningslagen Sats 12(i)}$$

$\therefore$ Motsägelse, antitesen falsk och varje rad är en permutation av gruppens element.

Att varje kolonn är en permutation av gruppens element visas analogt.

$$\left(\left.\begin{array}{l} a_j * a_i = a_k \\ a_l * a_i = a_k \end{array}\right\} \Rightarrow a_j * a_i = a_l * a_i \Rightarrow a_j = a_l \text{ enligt strykningslagen Sats 12(ii)}\right)$$

2.) $\langle G, * \rangle$ grupp, $a, b \in G$. Visa att $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
Visa med induktion att $(a_1 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

1°) Antag att $\langle G, * \rangle$ grupp och $a, b \in G$.

$$\begin{cases} (a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) \underset{\text{assoc.}}{=} a*\underbrace{(b*b^{-1})}_{=e}*a^{-1} = a*e*a^{-1} \\ \qquad = a*a^{-1} = e \\ (b^{-1}*a^{-1})*(a*b) \underset{\text{assoc.}}{=} b^{-1}*\underbrace{(a^{-1}*a)}_{=e}*b = b^{-1}*e*b \\ \qquad = b^{-1}*b = e \end{cases}$$

$\therefore$ $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.

2°) Visar att $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$. (F)

$n=1$: $a_1^{-1} = a_1^{-1}$ ✓ $n=2$ visades i 1°

Antag att $(a_1 * a_2 * \dots * a_k)^{-1} = a_k^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$, $k \geq 1$

$$(a_1 * a_2 * \dots * a_k * a_{k+1})^{-1} = ((a_1 * \dots * a_k) * a_{k+1})^{-1}$$

$$\overset{1°}{=} a_{k+1}^{-1} * (a_1 * \dots * a_k)^{-1} \overset{\text{ind.ant.}}{=} a_{k+1}^{-1} * (a_k^{-1} * \dots * a_1^{-1})$$

$$\underset{\text{assoc.}}{=} a_{k+1}^{-1} * a_k^{-1} * \dots * a_1^{-1}$$

$\therefore$ Induktion ger att formel (F) gäller för $n \geq 1$.

3.) Visa att i en grupp $\langle G, * \rangle$ finns inga andra idempotenta element än det neutrala elementet e. ($x \in G$ idempotent om $x^2 = x$).

Antag $\langle G, * \rangle$ grupp och $a \in G$ idempotent.
Då gäller $a^2 = a * a = a$.

$$a * a = a \Rightarrow a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$
$$\Rightarrow (a^{-1} * a) * a = e \Rightarrow e * a = e \Rightarrow \underline{a = e}.$$

$\therefore$ e är det enda idempotenta elementet i G. □

4.) Visa att $\langle Z_n, +_n \rangle$ är en grupp.

$Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ är sluten under $+_n$. $\langle Z_n, +_n \rangle$ algebraisk struktur och $+_n$ operation, $i +_n j = \begin{cases} i+j, & 0 \le i+j \le n-1, \\ i+j-n, & i+j \ge n. \end{cases}$

Bör visa (i) Associativitet, (ii) Existens av neutralt element och (iii) Existens av invers i Z_n till varje $a \in Z_n$.

(ii) $e = 0$ entydigt neutralt element, $0 +_n a = a +_n 0 = a$, $\forall a \in Z_n$.

(iii) $0 +_n 0 = 0$, $\therefore 0^{-1} = 0$.

$a \in \{1, \ldots, n-1\} \Rightarrow n-a \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\therefore n-a \in Z_n$.

$$\begin{cases} a +_n (n-a) = a + (n-a) - n = 0 = e \\ (n-a) +_n a = n-a+a-n = 0 = e \end{cases}$$

$\therefore$ Varje element har invers i Z_n, när vi visat (i), associativiteten hos $+_n$, är det klart att inversen är entydigt bestämd och vi har $\begin{cases} a^{-1} = n-a, & a \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ 0^{-1} = 0. \end{cases}$

Forts. vänd!

(i) Alternativ 1. Eftersom

$$\begin{cases} 1 +_n 1 = 2 \\ 1 +_n 2 = 3 \ (= 1 +_n 1 +_n 1) \\ \vdots \\ 1 +_n n-2 = n-1 = (\underbrace{1 +_n 1 +_n \cdots +_n 1}_{n-1 \text{ st.}}) \\ 1 +_n n-1 = 0 = (\underbrace{1 +_n 1 +_n \cdots +_n 1}_{n \text{ st.}}) \end{cases}$$

har vi att Z_n genereras (cykliskt) av $\{1\}$.

Kan visa associativiteten med Lights test tillämpad på $a = 1$.

$x +_n (1 +_n y)$: $= x * y$

$*$	0	1	2	...	$n-1$
$+_n$	1	2	3	...	0
0	1	2	3	...	0
1	2	3	4	...	1
2	3	4	5	...	2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
$n-1$	0	1	2	...	$n-1$

$+_n$	0	1	...	$n-1$
0	0	1	...	$n-1$
1	1	2	...	0
⋮	⋮			
$n-1$	$n-1$	0	...	$n-2$

$\langle Z_n, +_n \rangle$

$(x +_n 1) +_n y = x \circ y$

$\circ$	$+_n$	0	1	2	...	$n-1$
0	1	1	2	3	...	0
1	2	2	3	4	...	1
2	3	3	4	5	...	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
$n-1$	0	0	1	2	...	$n-1$

Tabellerna lika, $x * y = x \circ y$ $\forall x, y \in Z_n$

$\therefore$ $a = 1$ associerar med alla $x, y \in Z_n$

Då $a = 1$ genererar Z_n är $+_n$ associativ i Z_n

$\therefore$ (i), (ii) och (iii) ger att $\langle Z_n, +_n \rangle$ är en grupp.

(i) Alternativ 2.

Tag $i,j,k \in \{0,\dots,n-1\} = \mathbb{Z}_n$.

$$i +_n (j +_n k) = \begin{cases} i +_n (j+k), & 0 \le j+k \le n-1 \\ i +_n (j+k-n), & n \le j+k \le 2n-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i+(j+k), & 0 \le i+j+k \le n-1,\ 0 \le j+k \le n-1 \\ i+(j+k-n), & 0 \le i+j+k-n \le n-1,\ n \le j+k \le 2n-2 \\ i+(j+k)-n, & n \le i+j+k \le 2n-2,\ 0 \le j+k \le n-1 \\ i+(j+k-n)-n, & n \le i+j+k-n \le 2n-2,\ n \le j+k \le 2n-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i+j+k, & 0 \le i+j+k \le n-1 \\ i+j+k-n, & n \le i+j+k \le 2n-1 \\ i+j+k-2n, & 2n \le i+j+k \le 3n-3 \end{cases}$$

$$(i +_n j) +_n k = \begin{cases} (i+j) +_n k, & 0 \le i+j \le n-1 \\ (i+j-n) +_n k, & n \le i+j \le 2n-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (i+j)+k, & 0 \le i+j+k \le n-1,\ 0 \le i+j \le n-1 \\ (i+j-n)+k, & 0 \le i+j-n+k \le n-1,\ n \le i+j \le 2n-2 \\ (i+j)+k-n, & n \le i+j+k \le 2n-2,\ 0 \le i+j \le n-1 \\ (i+j-n)+k-n, & n \le i+j+k-n \le 2n-2,\ n \le i+j \le 2n-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i+j+k, & 0 \le i+j+k \le n-1 \\ i+j+k-n, & n \le i+j+k \le 2n-1 \\ i+j+k-2n, & 2n \le i+j+k \le 3n-3 \end{cases}$$

$\therefore$ $+_n$ är en associativ operator

$\therefore$ (i) – (iii) ger att $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ är en grupp.

5.) Visa att $\mathbb{R}_+$ och $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ är grupper under multiplikation.

a) $\mathbb{R}_+$ sluten under multiplikation, $\bullet$ operator $\langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$ algebraisk struktur.

(i) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$,
$\bullet$ associativ operator.

(ii) $1\cdot a = a\cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$, $e=1$ neutralt element.

(iii) $a \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{R}_+$.

$a\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1 = e.$ $\quad\therefore\ a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

$\therefore$ (i)–(iii) ger att $\langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$ är en grupp.

b) Varje komplext tal $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kan skrivas på polär form: $z = re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z_1\cdot z_2 = (r_1e^{i\theta_1})\cdot(r_2e^{i\theta_2}) = \underbrace{r_1\cdot r_2}_{>0}\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sluten under $\bullet$, $\langle \mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot \rangle$ Algebraisk struktur
$\bullet$ operator.

(i) $z_1(z_2\cdot z_3) = r_1e^{i\theta_1}(r_2e^{i\theta_2}\cdot r_3e^{i\theta_3}) = r_1r_2r_3\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_2)}$

$= r_1r_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}\cdot r_3e^{i\theta_3} = (r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2})\cdot r_3e^{i\theta_3}$

$= (z_1\cdot z_2)\cdot z_3, \quad \forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$\therefore$ $\bullet$ associativ operator

(ii) $z\cdot 1 = 1\cdot z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$\therefore$ $e = 1 = 1\cdot e^{i\cdot 0}$ är det neutrala elementet.

(forts. vänd)

(iii) $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$$\begin{cases} z\cdot\frac{1}{z} = re^{i\theta}\cdot\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta} = r\cdot\frac{1}{r}\cdot e^{i(\theta-\theta)} = 1\cdot e^{i0} = 1 = e \\ \frac{1}{z}\cdot z = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}\cdot re^{i\theta} = \ldots = 1 = e \end{cases}$$

$\therefore$ $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ $\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(i)–(iii) ger att $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ är en grupp.

6.) Komplettera tabellen så att $*$ är kommutativ med neutralt element, och så att varje element har en invers. Representerar tabellen då en grupp?

$*$	a	b	c	d
a	c			b
b	d	a		
c				
d				a

c måste vara neutralt element e $\Longrightarrow$

(Enda möjligheten att få en kopia av rad- och kolonnetiketten)

$*$	a	b	c	d
a	c		a	b
b	d	a	b	
c	a	b	c	d
d			d	a

$*$ kommutativ, $(a_1 * a_2 = a_2 * a_1)$ tabellen bör vara symmetrisk kring diagonalen $\Longrightarrow$

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	
c	a	b	c	d
d	b		d	a

Varje element bör ha invers:

Ser att: $c * c = c = e$, $c^{-1} = c$

$a * a = c = e$, $a^{-1} = a$

Då $b * a = d \neq e$, $b * c = b \neq e$, $b * b = a \neq e$

måste vi ha: $\begin{cases} b * d = c = e \\ d * b = c = e \end{cases}$ $\Longrightarrow$

Vilket ger: $b^{-1} = d$, $d^{-1} = b$.

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

6.) (forts.)

Representerar

$\bullet$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

en grupp $\langle G, \bullet \rangle$?

Bör kolla om $*$ är associativ. Ser att $a = b\bullet b$, $d = b\bullet a = b\bullet b\bullet b$, $c = b\bullet d = b\bullet b\bullet b\bullet b$,

så $\{b\}$ genererar (cykliskt) G. Kollar associativiteten med Lights test för b.

$x\bullet(b\bullet y)$:

$\parallel$

$x * y$

$*$	a	b	c	d
$\bullet$	d	a	b	c
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$(x\bullet b)\bullet y$:

$\parallel$

$x \circ y$

$\circ$	$\bullet$	a	b	c	d
a	d	b	c	d	a
b	a	c	d	a	b
c	b	d	a	b	c
d	c	a	b	c	d

$\therefore$ Tabellerna lika, $x * y = x \circ y$ $\forall x, y \in G$

$\Longrightarrow$ b associerar och genererar G $\Longrightarrow$ $\bullet$ associativ

$\therefore$ Tabellen representerar en grupp G.

(Byt plats på kolonn a och c samt rad a och c i tabellen för $\langle G, \bullet \rangle$:

$\bullet$	c	b	a	d
c	c	b	a	d
b	b	a	d	c
a	a	d	c	b
d	d	c	b	a

Sätt! $\begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ d = 3 \end{cases}$ $\bullet = +_4$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\therefore$ $\langle G, \bullet \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$)