

Elementär gruppteori, v.42

Kopplingsfunktioner

En kopplingsfunktion i n -variabler är en funktion från alla binära n -tupler till mängden $\{0, 1\}$ av binära 1-tupler, dvs. en avbildning

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

är en kopplingsfunktion. ($\{0, 1\}^n = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}$ (produkt med n faktorer)).

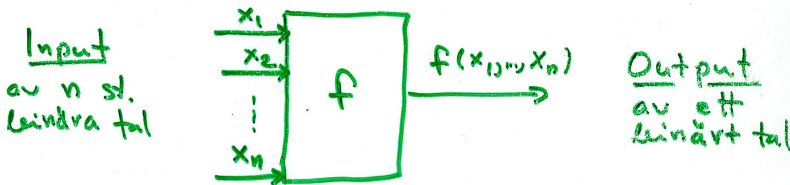
Låt

$$\mathcal{F}_n = \{f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^{\{0, 1\}^n}.$$

Sätt $X = \{0, 1\}^n$ och $Y = \{0, 1\}$. Då är $\mathcal{F}_n = Y^X$.

Kopplingsfunktioner

Namnet kopplingsfunktion kommer från att vi tänker oss ha en elektrisk krets som accepterar INPUT av n stycken variabler av binära tal och producerar OUTPUT av en variabel. Outputen beror endast av inputen, dvs. kretsen har inget minne.



Nu frågar vi oss hur många funktioner f finns det?

$$|\mathcal{F}_n| = |Y^X| = |Y|^{|X|}, \quad |X| = 2^n, \quad |Y| = 2,$$

Kopplingsfunktioner

så vi erhåller

$$|\mathcal{F}_n| = 2^{2^n}.$$

Exempelvis om $n = 3$ så är $|\mathcal{F}_3| = 256$ och om $n = 4$ så är $|\mathcal{F}_4| = 65536$.

För $n = 2$ finns det $2^{2^2} = 16$ kopplingsfunktioner: (Se föreläsningssanteckningar).

Kopplingsfunktioner

Hur många $f \in \mathcal{F}_n$ behövs för att "täcka" alla möjligheter om inputvariablerna kan permuteras?



Man kan säga att $f, g \in \mathcal{F}_2$ är ekvivalenta om g kan erhållas från f genom en permutation av variablerna x_1 och x_2 . Alltså om $g(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$, så är $f \sim g$ via permutationen

$$(x_1 x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Kopplingsfunktioner

Notera att $f \sim f$ via identitetspermutationen.

Låt oss bestämma alla ekvivalensklasser av funktioner i $\mathcal{F}_2$. Varje permutation av variablerna inducerar en permutation av $\mathcal{F}_2$. Permutationen $(x_1 x_2)$ på $\{0, 1\}$ ger permutationen

$$h = (f_2 f_4)(f_3 f_5)(f_{10} f_{12})(f_{11} f_{13}) \text{ av } \mathcal{F}_2,$$

dvs. $h = (f_0)(f_1)(f_2 f_4)(f_3 f_5)(f_6)(f_7)(f_8)(f_9)(f_{10} f_{12})(f_{11} f_{13})(f_{14})(f_{15})$.
Alltså 12 stycken disjunkta cykler. Dessa är ekvivalensklasserna av funktioner i $\mathcal{F}_2$. Således har vi 12 ekvivalensklasser.

Kopplingsfunktioner

Låt oss nu se hur man kan använda Sats 35 för liknande problem
av mer komplicerad art.

Exempel. Hur många “icke-ekvivalenta” kopplingsfunktioner i tre
variabler finns det om permuterade variabler ger ekvivalenta kopp-
lingsfunktioner. (Se föreläsningsanteckningar).

Kopplingsfunktioner

Låt oss avslutningsvis kontrollera fallet $n = 2$. Sätt $x = x_1$ och $y = x_2$, samt $X = \{0, 1\}^2$, $Y = \{0, 1\}$. Vi har 4 tillstånd för inputvariablerna (x, y) . Om dessa betecknas med 1, 2, 3, 4 har vi:

$$1 \leftrightarrow (0, 0), \quad 2 \leftrightarrow (0, 1), \quad 3 \leftrightarrow (1, 0), \quad 4 \leftrightarrow (1, 1).$$

Då är $X = \{1, 2, 3, 4\}$ och $\mathcal{F}_2 = \{f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$. Det finns 2 permutationer av variablerna x och y , och var och en av dessa permutationer inducerar en permutation av X :

$$e \Leftrightarrow (1)(2)(3)(4) \quad 4 \text{ cykler},$$

$$(xy) \Leftrightarrow (1)(23)(4) \quad 3 \text{ cykler}.$$

Kopplingsfunktioner

Alltså har vi $|G| = 2$ och $q = |Y| = 2$ variabler. Då ger Sats 35 att antalet olika ekvivalensklasser är:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q^{\text{cyc}_g} = \frac{1}{2}(2^4 + 2^3) = \underline{\underline{12}}.$$

(G undergrupp av S_4 , $|G| = 2$)