

Elementär gruppteori, v.41

Tillämpning på färgläggningsproblem

Exempel. På hur många sätt kan hörnen (eller sidorna) hos en kvadrat färgläggas med 2 olika färger om man inte skiljer på fall som kan överföras på varandra genom rotationer eller speglingar? Gruppen som opererar här är diedergruppen D_4 som har 8 element. (Se föreläsningsanteckningar).

Färgläggningsproblem

Vi har alltså $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = D_4 \subset S_4$ och $Y =$ mängden av olika färger. En färgläggning av hörnen är en funktion $f : X \rightarrow Y$. Vi skiljer inte på elementen $f \circ g$ då $g \in D_4$.

Låt oss i fortsättningen resonera allmänt med $G \subseteq S_n$ och $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

Problem: Hur många olika mängder $\{f \circ g : g \in G\}$ finns det då f genomlöper mängden

$$\mathcal{F} = Y^X = \{f : X \rightarrow Y\} = \{ \text{alla färgläggningar} \}?$$

Definition. För varje $g \in G$ definieras avbildningen $g' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ genom

$$g'(f) = f \circ g,$$

för varje $f \in \mathcal{F}$. Vidare definieras $G' = \{g' : g \in G\}$.

Färgläggningsproblem

Lemma 33. Avbildningen $g' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ är en permutation.

Bevis: (i) Avbildningen g' är surjektiv, ty tag godtyckligt $f_1 \in \mathcal{F}$ och sätt $f_2 = f_1 \circ g^{-1} \in \mathcal{F}$. Då gäller $g'(f_2) = f_2 \circ g = f_1 \circ g^{-1} \circ g = f_1$.

(ii) Avbildningen g' är injektiv, ty låt $g'(f_1) = g'(f_2)$, dvs. $f_1 \circ g = f_2 \circ g$. Då gäller $f_1(g(x)) = f_2(g(x))$ för alla $x \in X$. Då g är en permutation så är den surjektiv och därmed gäller det att $f_1(x) = f_2(x)$ för alla $x \in X$, så $f_1 = f_2$, vilket ger att g' är injektiv.

Alltså har vi att g' är en bijektion och därmed en permutation. $\square$

Anmärkning. Vi observerar att $G (= D_n)$ är en undergrupp av $\text{Sym}(X)$ och att G' är en delmängd av $\text{Sym}(\mathcal{F})$.

Färgläggningsproblem

Sats 34. Strukturen $\langle G', \circ \rangle$, där $G' = \{g' : g \in G\}$, är en undergrupp av $\text{Sym}(\mathcal{F})$.

Bevis: Klart att $G' \neq \emptyset$. Tag $h', g' \in G'$. Vi bör visa att $h' \circ g' \in G'$, (Sats 18), ty $|\mathcal{F}| < \infty$. För varje $f \in \mathcal{F}$ gäller

$$\begin{aligned}(h' \circ g')(f) &= h'(g'(f)) = h'(f \circ g) = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \\ &= (g \circ h)'(f).\end{aligned}$$

Alltså: $h' \circ g' = (g \circ h)' \in G'$, ty $g \circ h \in G$. $\square$

Färgläggningsproblem

Påstående: Awbildningen $' : G \rightarrow G'$ som awbildar g på g' är bijektiv,
varför $|G| = |G'|$.

Bevis: Vi har att $G' = \{g' : g \in G\}$.

(i) Klart att ' är surjektiv.

(ii) Visar injektiviteten. Antag att $|Y| \geq 2$. För alla $f \in \mathcal{F}$ gäller

$$g' = h' \Rightarrow g'(f) = h'(f) \Rightarrow f \circ g = f \circ h. \quad (*)$$

Antites: $g \neq h$.

Då finns det ett $i \in X : j_1 = g(i) \neq h(i) = j_2$. Vidare finns det då
ett $f \in \mathcal{F}$ sådant att $f(j_1) \neq f(j_2)$. Då gäller

$$(f \circ g)(i) = f(g(i)) = f(j_1) \neq f(j_2) = f(h(i)) = (f \circ h)(i),$$

men detta ger en motsägelse till (*)! Antitesen är falsk och $g = h$.
Därmed är ' injektiv.

Vi har då att $' : G \rightarrow G'$ är en bijektion, vilket ger att $|G| = |G'|$.

□

Färgläggningsproblem

Då g' är en permutation på $\mathcal{F}$ för varje $g' \in G'$ (Lemma 33), så erhålls G' -ekvivalensklassen, (med avseende på gruppen G'), för $f \in \mathcal{F}$ med stöd av Sats 28 av

$$\underline{[f] = \{g'(f) : g' \in G'\} .}$$

Alltså gäller det att

$$\{f \circ g : g \in G\} = \{g'(f) : g \in G\} = \{g'(f) : g' \in G'\} = [f] .$$

Därmed tillhör alla element $f \circ g$ för $g \in G$ samma G' -ekvivalensklass
av f , med andra ord ger dessa element upphov till färgläggningar som
vi inte skiljer på.

Färgläggningsproblem

Vi är alltså intresserade av antalet G' -ekvivalensklasser i $\mathcal{F}$ med avseende på G' . Nu ger Sats 32 (Burnside) och ovanstående påstående att antalet olika G' -ekvivalensklasser är

$$\frac{1}{|G'|} \sum_{\substack{g \in G' \\ (g' \in G')}} |\mathcal{F}_{g'}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{F}_g|,$$

där

$$\mathcal{F}_{g'} = \{f \in \mathcal{F} : g'(f) = f\} = \{f \in \mathcal{F} : f \circ g = f\}.$$

Exempel. Vi återgår till det tidigare exemplet med kvadraten. (Se föreläsningsanteckningar).

Färgläggningsproblem

Låt oss, innan vi fortsätter med vårt exempel, beskriva ett lämpligt sätt att beräkna $|\mathcal{F}_{g'}|$ då $g \in G \subseteq S_n$ och G' opererar på $\mathcal{F} = Y^X = \{\text{alla färgläggningar}\}$, där $Y = \text{mängden av alla färger}$, antalet olika färger} = $q = |Y|$ och $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

Om $g \in G$ skrivs som en produkt av disjunkta cykler så skriver vi alltid ut också cykler av formen (k) . Vi inför nu begreppet **cykelindex**:

Färgläggningsproblem

Definition. Antalet disjunkta cykler i permutationen $g \in G$ betecknas med $\text{cyc } g$ och kallas cykelindexet för g .

Om exempelvis $f \in S_7$ och $f = (23)(567) = (1)(23)(4)(567)$, så är $\text{cyc } f = 4$.

Exempel. (Se föreläsningsanteckningar).

Färgläggningsproblem

Om vi generaliserar resonemanget i föregående exempel till $g \in G \subseteq S_n$, så erhåller vi att

$$\underline{|\mathcal{F}_{g'}| = q^{\text{cyc}_g}}.$$

Vi återgår till exemplet med kvadraten: (Se föreläsningsanteckningar).

Färgläggningsproblem

Vi sammanfattar våra utredningar i följande sats:

Sats 35. Låt G vara en undergrupp av S_n , $X = \{1, 2, \dots, n\}$ och Y en mängd av q stycken färger. Då är antalet av G inducerade G' -ekvivalensklasser, (olika färgläggningar), på $\mathcal{F} = Y^X = \{\text{alla färgläggningar givet av}$

$$\underline{\underline{k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{F}_{g'}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q^{\text{cyc}_g}}}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \{f: X \rightarrow Y\} \\ g'(f) = f \circ g \\ G' = \{g': g \in G\} \\ \mathcal{F}_{g'} = \{f \in \mathcal{F}: f \circ g = f\} \end{cases}$$

Exempel. En molekyl har atomerna placerade i hörnen av en liksidig triangel. På hur många sätt kan man färglägga atomerna med q stycken givna färger? (Se föreläsningsanteckningarna).

Exempel. Rotationsgruppen till en kub. Låt G vara gruppen av permutationer av sidorna som består av rotationssymmetrier av kuben. På hur många sätt kan sidorna för kuben färgläggas med q stycken färger? (Se föreläsningsanteckningarna).

Färgläggningsproblem

Exempel. Antag att vi har kuber sådana att alla sidorna är målade med olika färger. Om $q \geq 6$ färger är tillgängliga, hur många olika kuber har vi?

Lösning: Låt $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ och låt Y vara mängden av q färger, (såsom tidigare).

Emedan sidorna har olika färger, så är färgläggningen i detta fall en injektiv avbildning

$$f : X \rightarrow Y.$$

Låt $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} = Y^X$ beteckna mängden av alla sådana avbildningar.
Låt vidare G beteckna rotationsgruppen till kuben. Då vet vi att $|G| = 24$.

Färgläggningsproblem

Om $g \in G$ och $f \in \mathcal{G}$, så är $g'(f) = f \circ g$ en injektiv avbildning.
Alltså $g'(f) \in \mathcal{G}$ och $g' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Antag att $g \in G$ med $g \neq e$. Då är $\mathcal{G}_{g'} = \{f \in \mathcal{G} : f \circ g = f\}$. Om $f_1 \in \mathcal{G}_{g'}$, dvs. $f_1 \circ g = f_1$, så följer det från $g(i) = j$ att

$$f_1(i) = f_1(g(i)) = f_1(j).$$

Emedan f_1 är injektiv följer det att $i = j$ för varje $i \in X$. Då $g \neq e$ är detta omöjligt, varför $\mathcal{G}_{g'} = \emptyset$ då $g \neq e$. Alltså

$$|\mathcal{G}_{g'}| = 0, \text{ då } g \neq e.$$

Nu gäller

$$\mathcal{G}_e = \{f \in \mathcal{G} : f \overset{foe}{=} f\} = \mathcal{G}.$$

Färgläggningsproblem

Vidare är antalet ordnade delmängder till Y bestående av 6 stycken element givet av

$$(q)_6 = \frac{q!}{(q-6)!},$$

ty den första färgen kan väljas på q olika sätt, den andra på $q-1$ olika sätt osv., alltså:

$$(q)_6 = q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)(q-5) = \frac{q!}{(q-6)!}.$$

Därmed är

$$\underline{|\mathcal{G}_{e'}| = \frac{q!}{(q-6)!}.$$

Färgläggningsproblem

Sats 35 ger då att antalet olika färgläggningar är

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{G}_{g'}| = \frac{|\mathcal{G}_{e'}|}{|G|} = \frac{q!}{24(q-6)!}.$$

Om $q = 6$ (det minimala antalet olika färger), så får vi att

$$\underline{n} = \frac{6!}{24} = \underline{30}.$$

$$\underline{q} \mid n$$

Färgläggningsproblem

$$\underline{n} = \overline{24} = \underline{30}.$$

Hur många olika färningar
med sidornas nummer 1, 2, ..., 6
kan vi åstadkomma?

Svar: 30 st., $q = 6$

q	n
6	30
7	210
8	840
⋮	⋮
⋮	⋮

