Grafteori och partiell ordning, period 3, vt. 2013

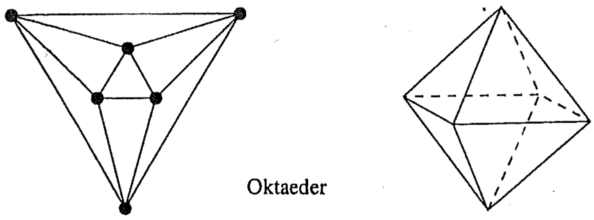
Hemuppgifter till torsdagen den 24 januari

1. Låt K_n beteckna den fullständiga grafen med n noder. För vilka värden på $n > 3$ finns det en Eulerloop i K_n?

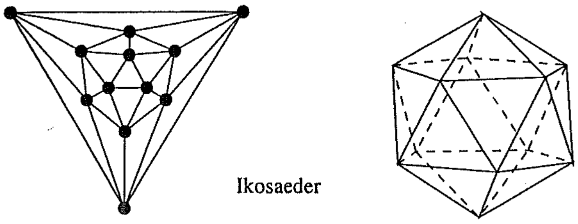
2. Låt X vara mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ och V mängden av 2-elementiga delmängder av X. Vad är $|V|$? Om A och B är två sådana delmängder dra en båge mellan dem om och endast om de är *disjunkta*. (Om $A = \{1, 3\}$ och $B = \{2, 5\}$ så är de disjunkta medan A och $C = \{2, 3\}$ inte är disjunkta.)

Beskriv grafen (V, E) genom att rita figur och skriva upp grannmatrisen. Är grafen sammanhängande?

3. Är det möjligt att hitta en Eulerloop eller Hamiltoncykel i grafrepresentationen av en oktaeder och en ikosaeder. (Hörnen är grafens noder och kanterna är grafens bågar.)



Oktaeder



Ikosaeder

4. Visa att en sammanhängande graf med n noder har minst $n - 1$ bågar.

Antag att G är en sammanhängande graf med n noder. Hur många bågar måste åtminstone tas bort för att den kvarvarande grafen skall sakna cykler.

5. Visa att en sammanhängande graf med n noder är ett träd om och endast om antalet bågar är $n - 1$.

6. Bestäm antalet riktade vägar från nod v_i till v_j av längden 3 då den riktade grannmatrisen har följande utseende

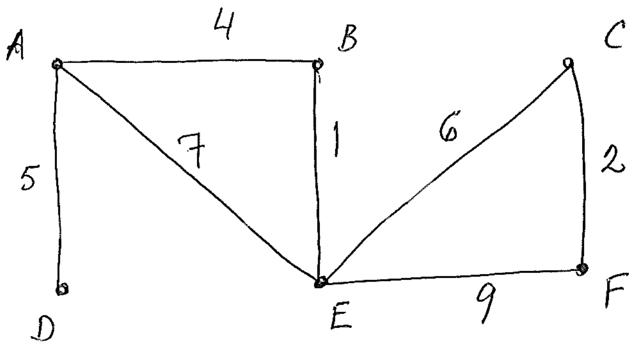
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redogör för hur de riktade vägarna av längden 3 har uppkommit.

7. Antag att en riktad graf med n noder har en grannmatris där alla ettor ligger strängt ovanför diagonalen: $A_{ij} = 1 \Rightarrow i < j$. (Rita upp en sådan av moderat storlek!) Visa att $A^n = 0$ (nollmatrisen). Hur ser motsvarande graf ut?

8. Kortaste vägen, MinPlus-kalkyl

Betrakta följande vägkarta där bågarnas vikter betecknar avstånd. Avståndet från en nod till sig själv är 0, vilket dock ej är utmärkt i grafen.



Vi definierar en litet annorlunda grannmatris P där

$P_{ij} = P_{ji}$ är avståndet från v_i till v_j om det finns en båge mellan v_i och v_j

$P_{ii} = 0$ för varje i

$P_{ij} = P_{ji} = \infty$ om båge mellan v_i och v_j saknas, $i \neq j$.

I vårt exempel är

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & 5 & 7 & \infty \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 6 & 2 \\ 5 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 7 & 1 & 6 & \infty & 0 & 9 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

För två sådana $n \times n$ matriser P och Q definieras en "matrismultiplikation" $\otimes$, *MinPlus-multiplikation*, genom

$$(P \otimes Q)_{ik} = \min_{1 \leq j \leq n} (P_{ij} + Q_{jk}), \quad i, k = 1, 2, \ldots n.$$

Analogin med vanlig matrismultiplikation är att summering ersätts med minimering och multiplikationen med addition. (Den vanliga matrisprodukten ges ju av $(PQ)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} Q_{jk}$.) MinPlus-multiplikationen delar många algebraiska egenskaper med vanliga matrismultiplikationen. Man kan t. ex. lätt inse att den är associativ men inte kommutativ.

Beräkna $P \otimes P$ och $P^{\otimes 3}$ i exemplet ovan. Vad anger dessa matriser? Vad blir $P_{16}^{\otimes 4}$?