9. PREDIKATLOGIK

SL är, som vi sett ovan, ett mycket enkelt formellt system. Det behandlar endast en liten, omän mycket viktig, bit av den omfattande, och delvis ganska diffusa, helhet som vi kallar den naturliga logiken. Men trots att SL är enkel är den, som vi också sett ovan, förvånande användbar inom många områden. Med tanke på enkelheten är den därför mycket kraftfull. Den visar så att säga att man kan åstadkomma mycket med litet.

När Gottlob Frege lade grunden till den moderna formella logiken var hans avsikt, som jag tidigare påpekat, att skapa ett formellt språk, med exakta regler, med hjälp av vilket det skulle vara möjligt att härleda matematikens sanningar från ett fåtal självklara logiska axiom. Det är uppenbart att SL inte räcker till för detta. Vi kan inte formalisera ens mycket enkla satser inom matematiken, och än mindre härleda dem inom ramen för SL. Att *två plus två är fyra* kan inte formaliseras på annat sätt än genom att vi skriver en enda satsbokstav. Men den säger ju ingenting alls om den matematiska strukturen hos satsen. Inte heller kan vi få någon bra formalisering av den för aritmetiken fundamentala satsen *För varje tal finns det ett större tal*, eller av den till synes paradoxala satsen *Det finns lika många udda tal som det finns tal*.

För att kunna behandla matematiska satser genom formell logik behöver vi en betydligt mer kraftfull logik. En sådan utvecklades av Gottlob Frege. Liksom när det gäller SL baserade han denna logik på den traditionella teoretiska forskningen inom logiken sedan Aristoteles dagar.

Vi har tidigare sett att Aristoteles ägnade speciellt intresse åt den typ av slutledningar som kallas syllogismer. I dessa spelar orden *alla* och *några* en central roll. Dessa ord gör det möjligt att ange mängd eller kvantitet av något. Syllogistiken är inte en satslogik utan en predikatlogik. Den tar alltså inte satser som grundläggande element utan predikat, dvs egenskaper av olika slag. Om vi formaliserar en syllogism inom SL så finner vi att våra regler alltid gör den ogiltig. Det går m.a.o. inte att analysera syllogistiska resonemang med SL. Vi behöver en kraftfullare logik.

Benämningen *predikatlogik* (i fortsättningen PL) kommer av att detta formella system tar predikat, dvs egenskaper av varierande typ som grundläggande. Vi markerar sålunda egenskaper med bokstäver. Men en egenskap förekommer ju aldrig fritt. Det finns alltid något, ett ting, objekt, en individ som har egenskapen. Därför måste vi också kunna markera sådana. I fortsättningen använder jag ordet *individ* för ting, objekt etc. Denna logik kallas ibland *kvantifikationslogik*. Namnet kommer av att man kan ange kvantiteten av individer, dvs hur många individer som har en viss egenskap. Detta gör vi med orden *alla* och *några*. Att *ingen* har en viss egenskap anger vi helt enkelt genom att sätta negationstecken efter *alla* eller före *inga*. Att säga *Ingen är odödlig* är detsamma som att säga antingen *För alla gäller att de inte är odödliga*, eller *Det finns inte någon som är odödlig*.

PL är en kraftfull logik, men jämfört med naturlig logik är den förstås ytterst begränsad. Ordet "alla" avser bokstavligen exakt alla. Om det finns ett enda undantag så får "alla" inte användas. Ordet "några" avser minst en. Det räcker alltså med att en enda har en egenskap för att "några" skall användas i PL. I naturlig logik gäller detta förstås inte. Med "några" avser vi normalt minst 3-4 stycken. Det är tveksamt om två stycken kan betecknas som några. Naturlig logik är inte exakt på denna punkt. I naturlig logik har vi uttryck som "ganska många", "de flesta", "de allra flesta", "majoriteten" osv som gör att vi kan ange kvantiteter ganska nyanserat utan att ändå vara exakta. Detta är omöjligt i PL. När vi vill vara exakta i naturlig logik tar vi talen till hjälp. Vi kan säga *20 personer var närvarande, Jag såg omkring 200 sälar på klipporna, Ca 500 personer dör årligen i* *trafiken.* Eftersom talen inte ingår i vokabulären för PL kan vi inte formalisera dylika satser. Vi kan däremot formalisera t.ex. *minst en person var närvarande, endast en person var närvarande, högst två personer var närvarande, minst tre personer var närvarande* osv. Men när vi talar om tre eller flera blir formlerna långa och svåra att överblicka.

PL bygger på SL. Det betyder att allt som jag sagt om SL ovan fortfarande gäller. Men i PL tillkommer några nya tecken och reglerna för dessa. Vokabulären, grammatiken och semantiken måste alltså utvidgas.

Vokabulären för Pl.

Förutom tecknen i SL finns följande:

1) Tecken för individer. Vi kallar dessa *individnamn*. De fungerar på samma sätt som namnen i naturliga språk. De utpekar objekt av något slag. Som namn använder vi alfabetets små bokstäver a,b,c,d,.... fram till och med v. Vid behov använder vi subskript, eller superskript. Det finns ingen risk att vi skall förväxla dessa med satsbokstäver därför att ett namn *aldrig får stå ensamt*. Här gäller samma regel som i naturliga språk. Om vi bara skriver *Kalle* så säger vi ingenting. Ett individnamn måste alltid kombineras med ett predikat för att vi skall på ett påstående. I PL måste ett individnamn alltid kombineras med en predikatbokstav. Namnet *Kalle* kan t.ex. kombineras med predikaten *ung* och *man* till satsen *Kalle är en ung man*.

2) Tecken för variabler. När det är obestämt vilken eller vilka individer vi talar om måste vi använda en variabel. Som variabler använder vi små bokstäver ur slutet av alfabetet x,y,z....med eller utan sub- eller superskript.

3) Tecken för predikat (egenskaper). Vi använder alfabetets stora bokstäver A,B,C,D.... Dessa kan aldrig stå ensamma utan skrivs alltid tillsammans med ett namn eller en variabel. Vanligen skriver man namnet eller variabeln efter predikatbokstaven. Ak, Ba, Cx, Dy...

Ett predikat kallas *enställigt* om det är enkelt, av typen röd, stor, odödlig, udda, att vara människa, att vara kvinna osv. Ett predikat kallas *tvåställigt* om det är frågan om en relation mellan två individer av något slag. T.ex. större än, älska, sitta på, lyssna till... Om predikatet är tvåställigt framgår detta genom att vi skriver Rab, Skv, Lxy, Dax, Mya.... Mer sällan använder vi *treställiga* predikat, men sådana betecknas enligt samma mönster. *Att ligga emellan* är ett exempel på ett treställigt predikat. Att Åbo ligger mellan Helsingfors och Stockholm formaliserar vi Lahs. Att något ligger mellan två andra blir Lxyz. Vid behov kan vi använda använda *fyrställiga* predikat, Aabcd, Bxyzå....

4) Läroböckerna använder olika symboler för att ange *alla*, som kallas *allkvantor*. Jag väljer (x), en variabel inom parentes. Detta tecken utläses: För alla x gäller...Det kan inte stå ensamt utan måste alltid följas av ett predikat med en variabel, (x)Gx, (y)Ky, (z)(Az & Bz)...En kvantors *räckvidd* markeras med paranteser.

5) För att ange *några* skriver jag E jämte en variabel inom parenteser, (Ex). Detta tecken kallas *existenskvantor* och utläses: Det finns åtminstone ett x sådant att...Det kan inte stå ensamt utan följs alltid av ett predikat jämte variabel. (Ey)Ky, (Ez)(Az v Bz v Cz)...

Grammatiken för PL.

Förutom reglerna för SL behöver vi regler för hur vi skriver formler med de nya tecknen. I viss mån framgick detta redan ovan. De uttryck som vi hade exempel på ovan kan kombineras genom konnektiverna enligt reglerna för SL. Vi kan t.ex. skriva Ab & Bc, Kl v Sv, Rd ↔ Cf. Parenteser och klamrar används som tidigare. (Rs & -Dg) & -(Fa→Gh). Kvantorerna måste alltid följas av predikat jämte en eller flera variabler. Vi säger att kvantorerna styr variablerna. (x)(Bx v Ax), (Ex)(Ax & Bx & Cx & Dx). Kvantorerna anger hur många det finns av de individer som variablerna står för. Kvantorer kan förekomma inne i en formel. a→ (x)(Bx v Cx v Kx), Ga & (Ez)Fz. Vi kan också skriva flera kvantorer efter varandra. (x)(y)(z)(Gx v By v Dz). Slutligen måste alla förekomster av variablerna styras av en kvantor. Vi får alltså inte skriva Gx & Fy för då vet man inte om man avser alla eller endast några av x och y, eller om man avser alla x och endast några y eller tvärtom.

Semantiken för PL.

Reglerna för SL gäller förstås. Jag har redan angett betydelsen hos de olika tecknen. Återstår att ange sanningsvillkoren för formlerna i PL. Detta kan inte längre göras med sanningsvärdetabeller därför att det ofta finns otaliga möjligheter. Vi kan alltså inte gå igenom alla kombinationer av SV genom tabeller. Tag t.ex. satsen *Någon älskar Maria*. (Ex)Äxm. När är denna sats sann? Antag en bestämd kvinna Maria. Låt oss hålla oss till människor. Det finns massor av människor. En eller några få av dem älskar Maria, men de flesta vet inte ens vem Maria är. Men det är omöjligt att gå igenom alla möjligheter i en SVT och sätta ut S respektive F allteftersom personen älskar eller inte älskar Maria. Vi måste uttrycka oss mera allmänt. Enligt reglerna för PL är denna formel sann omm det finns åtminstone ett namn som vi kan sätta in för x så att den blir sann. För allkvantorn gäller förstås att formeln är sann omm alla x som styrs av kvantorn faktiskt har egenskapen i fråga.

Formalisering inom PL.

Att formalisera satser i naturliga språk med hjälp av PL innebär att med hjälp av reglerna i PL gå in i satsen och söka fram dess predikatlogiska struktur, som sedan åskådliggörs med hjälp av en formel. Nedan följer några exempel.

Sven Duvas fader var sergeant, avdankad, arm och grå, var med år åttioåtta ren och var ren gammal då.(Runeberg) Vi söker först reda på ev. konnektiver. Här utsägs ett antal egenskaper om en viss person. Dessa förbinds med &. Personen betecknar vi med d. Predikaten är S=sergeant, A=avdankad, R=arm, G=grå, V=var med år åttioåtta, M=var gammal redan åttioåtta. Här finns inga uttryck som anger mängd så vi behöver inga kvantorer. Vi får formeln Sd & Ad & Rd & Gd & Vd & Md.

Vi kan använda kärnkraft eller fossila bränslen, men vi kan också satsa på alternativa energikällor eller på att spara energi. Inom PL har vi inga tecken för vare sig “vi” eller “kan”. Här finns inga motsvarigheter till kvantorer. Det är därför ingen mening med att försöka formalisera denna sats i PL. Här bör vi i stället använda SL. Vi får då k=vi kan använda kärnkraft, f=vi kan använda fossila bränslen, a=vi kan satsa på alternativa energikällor, s=vi kan spara energi. Vi får den enkla formeln (k v f) & (a v s).

Man kan bli alkoholist om och endast om man ofta super. Ordet “man” avser ofta “var och en, alla”. Vi använder alltså allkvantorn. K=kan bli alkoholist, S=super ofta. Vi använder förstås tecknet för ekvivalens. Vi får formeln (x)(Kx ↔Sx).

Om man vill vara frisk så varken röker, super eller knarkar man. Här avses igen var och en av oss. F=vill vara frisk, R=röker, S=super, K=knarkar. PL-strukturen återges i formeln (y)(Fy → (-Rx & -Sx & -Kx)). Vi kan utläsa formeln: Det gäller för varje x att om x vill vara frisk så röker x inte och super x inte och knarkar x inte. Vi kan också skriva (z)(Fz → -(Rx v Sx v Kx)). Detta läses: Det gäller för varje z att om z vill vara frisk så varken röker, super eller knarkar z.

Somliga ungdomar super, röker eller knarkar, medan en del super men varken röker eller knarkar, och några ungdomar varken super röker eller knarkar. Här talas det om några ungdomar på tre ställen. Vi använder alltså existenskvantorn. U = är en ungdom. Vi får följande formel: (Ex)(Ux & (Sx v Rx v Kx)) & (Ey)(Uy & Sy & -(Ry v Ky) & (Ez)(Uz & - (Sz v Rz v Kz)).

Där jag är är inte döden, och där döden är är inte jag. (Lucretius) “Jag” betecknar vi med ett namn “j”. Döden är här personifierad. Vi använder namnet “d” för döden. Ordet “Där” anger en plats. Vi omskriver satsen en smula: För varje plats gäller att om jag är där så är döden inte där och om döden är där så är inte jag där. Att någon befinner sig på en plats

betecknar vi med ett tvåställigt predikat, Bxy. P=är en plats. Vi får formeln. (x){((Px & Bjx) →-Bdx) & (Bdx →-Bjx)}
För varje tal finns det ett större tal. Här har vi två kvantorer. Först "varje" och sedan "det finns". T=är ett tal, Sxy=x är större än y. (x)(Tx→(Ey)(Ty & Syx)). Formeln säger: Det gäller för varje x att om x är ett tal så finns det åtminstone ett tal y sådant av y är större än x. Om vi så vill kan vi placera alla kvantorer i början av formeln. (x)(Ey)((Tx & Ty)→Syx).
För varje kropp gäller att den fortsätter i sitt tillstånd av vila eller likformig rörelse så länge den inte påverkas av någon kraft. (Newtons första lag) K=är en kropp, R=är en kraft, V=är i vila, L=är i likformig rörelse, Pxy=x påverkar y. Formeln ser ut såhär. (x)(Kx →(Vx v Lx) ↔-(Ey) (Ry & Pyx))
Märk att "Alla A är B" skall formaliserar med → inte med &, alltså (x)(Ax→Bx). Men "Några A är B" måste formaliseras med & och inte med →, (Ex)(Ax & Bx).

Vi kan nu formalisera alla syllogismer. Det finns en syllogism som heter Ferio som ser ut såhär. *Inga M är L. Några S är M. Alltså: Några S är L.* Vi formaliserar regeln.
-(Ex)(Mx & Lx)
<u>(Ex)(Sx & Mx)</u>
(Ex)(Sx & Lx)
Läsaren bör själv försöka formalisera följande syllogismer.
1) *Inga L är M. Varje S är M. Alltså: Inga S är L.* (Cesare)
2).*Varje L är M. Inga S är M. Alltså: Inga S är L.* (Camestres)
3) *Inga L är M. Några S är M. Alltså: Några S är inte L.* (Festino)
4) *Varje L är M. Några S är inte M. Alltså: Några S är inte L.* (Baroco)
5) *Varje M är L. Varje M är S. Det finns M. Alltså: Några S är L.* (Darapti)