8 MODAL SATSLOGIK

8.1 BEGREPPEN MÖJLIG OCH NÖDVÄNDIG

Att det finns en skillnad mellan att ett påstående är möjligen sant, sant och nödvändigtvis sant är uppenbart. Det är möjligen sant att Aristoteles hade sex med både män och kvinnor, det är sant att han var lärare åt en ung kungason, som senare skulle bli känd som Alexander den store, och det är nödvändigtvis sant att han inte längre är i livet. I våra logiska resonemang utnyttjar vi ofta skillnaden mellan möjlig, verklig och nödvändig. Dessa anger olika former eller sätt på vilka påståenden kan vara sanna. Naturligtvis finns det motsvarande begrepp för falska påståenden. Det är omöjligt att Aristoteles träffade Jesus, det är falskt att han grundade Akademin och blev dess rektor och det är nödvändigtvis falskt att han uppfann en tidsmaskin.

På latin heter form "*modus"* och den logik som behandlar olika slag eller former av sanning kallas därför modal logik. Modallogiken är sålunda en "rikare logik" än en logik som bara räknar med sant och falskt. Den kommer därmed närmare den intuitiva logiken än den mycket enkla satslogiken.

Som vanligt var Aristoteles den förste. Han analyserade olika former av sanning och utredde hur följande begreppspar fungerar och hur de förhåller sig till varandra.[1]

- möjligt - inte möjligt
- tänkbart - inte tänkbart
- omöjligt - inte omöjligt
- nödvändigt - inte nödvändigt
- sant - inte sant

I modern modal logik utgår man ifrån att "möjligt" och "tänkbart" är synonyma. Modallogiken reduceras då till en undersökning av de logiska egenskaperna hos "möjlig" och "nödvändig". Vi får då tre typer av sanning respektive falskhet.

1. möjligen sann/ falsk
2. kontingent (tillfälligen) sann/falsk
3. nödvändigtvis sann/falsk.

Att ett påstående är kontingent innebär att dess sanning är beroende av tillfälligheter, dvs av vad som råkar inträffa. Ett test på kontingens är att man kan tänka sig situationer som gör påståendet sant men också omständigheter som gör det falskt. De flesta påståenden vi yttrar är kontingenta. "Det regnade i går" kan vara sant, men likaväl falskt. Det beror på hurudant vädret råkade vara. "Sverige är en monarki" är kontingent. Det råkar vara så, men Sverige kunde ha infört republik. "Hans Rosing har skägg" är kontingent. Det råkar vara så, men det kunde lika väl vara falskt.

Det finns en rad uttryck som används som synonymer till "möjlig" och "nödvändig". I stället för "Det är möjligt att jag kommer" är kan vi skriva "Jag kanske kommer", "Det kan hända att jag kommer", "Jag kan komma" etc. I stället för "Det är nödvändigt att du kommer" kan vi skriva "Du måste komma", "Du är tvungen att komma" etc.

Modallogiken är komplicerad, men den kompliceras ytterligare av att det finns olika slag av möjlighet och nödvändighet. Dessutom kan det vara svårt, ibland direkt omöjligt att avgöra vad som är möjligt och nödvändigt. Vi kommer in på de djupaste vetenskapliga och filosofiska frågorna. Låt oss som exempel analysera några slag av möjligheter/omöjligheter. Det är omöjligt att äta kakan och ha den kvar. Detta är en *logisk omöjlighet*. Att äta upp en kaka och ändå ha den kvar är en logisk motsägelse, och logiska motsägelser är alltid omöjliga. Det är omöjligt att leva utan att få i sig vatten. Man torkar ut och dör om någon

[1] Aristoteles *De interpretatione*, Thales 2000 s. 32.

vecka. I detta fall är det naturlagarna som sätter en gräns för vad som är möjligt. De sätter gränser för det mesta. De sätter mycket snävare gränser än logiken. Denna typ av möjlighet/omöjlighet kallar vi *kausal* därför att den har att göra med orsaker.

Det finns mycket som är kausalt möjligt, men som i praktiken är omöjligt. Något är kausalt möjligt om det inte står i konflikt med någon naturlag. Det är praktiskt möjligt om vi kan göra det i praktiken. Det är kausalt möjligt att hindra övergödning av Östersjön, men det är av många skäl omöjligt i praktiken. Det bästa man i praktiken kan göra är att steg för steg försöka minska utsläppen. På samma sätt kan vi skilja mellan logisk nödvändighet, kausal nödvändighet och praktisk nödvändighet. Alla giltiga deduktiva slutledningar är logiskt nödvändiga, att alla organismer behöver vatten och föda är kausalt nödvändigt och att ha klara trafikregler är praktiskt nödvändigt.

Ett logiskt nödvändigt påstående kan inte vara kontingent. Lika litet kan något som är logiskt omöjligt vara kontingent. Men vi kan skilja mellan praktisk och kausal kontingens. Att vi kör på högra sidan är kontingent i praktiken. Vi kunde lika gärna köra på vänstra. Att vi måste äta är inte kontingent i praktiken. Vi har inget praktiskt val i den frågan. Men det är kausalt kontingent. Naturlagarna råkar vara sådana att vi måste äta, men naturlagarna kunde vara helt andra.

Läsaren uppmanas att fundera över vilka modala egenskaper följande påståenden har.

1. Det finns liv på Mars.
2. Det finns liv på jorden.
3. Där det finns liv finns det hopp.
4. Den som lever får se.
5. Alla däggdjur har en lever.
6. Om du inte lever om tio år är du död.
7. Motzart är död men lever ändå.
8. Lever steks eller kokas.
9. Man lär så länge man lever.
10. Det är möjligt att liv uppstår av död materia.

8.2. FORMELL MODALLOGIK

Den moderna forskningen inom formell logik inleddes, som jag tidigare nämnt, under slutet av 1800-talet. Då konstruerades formell satslogik, predikatlogik och klasslogik (mängdlära). Omkring 1920 upptäcktes metoden med SV-tabeller. Det dröjde dock ända till mitten av 1900-talet innan man började undersöka sätt att formalisera modallogiken. Då började samtidigt en mängd filosofer intressera sig för formell modallogik. Under 1950- och 1960-talet utvecklades ett system för formell modallogik som sedan blivit standard i läroböckerna.

En av förgrundsfigurerna i denna forskning var den finlandssvenska filosofen Georg Henrik von Wright (1916- 2002). Jag citerar von Wright:

> "Min modallogiska period började 1949 och hör samman med ett skede i den moderna logikens utveckling, som kunde omtalas som modallogikens pånyttfödelse och upptäckten av de modallogiska begreppsfamiljerna. Min första insats var *An Essay in Modal Logic* från 1951. Som mitt sista nyskapande bidrag till modallogiken ville jag anse uppsatsen "Diachronic and Synchronic Modalities" från 1979."[2]

von Wright minns inte varför han började forska i formell modallogik, men han kommer ihåg en idé han fick en dag när han var ute på vandring. (Vid denna tid var han professor i filosofi i Cambridge). Inom den formella predikatlogiken, som utvecklades av Frege, är termerna "någon", "ingen" och "alla" centrala. Formaliseringen bygger på de logiska egenskaperna hos dessa termer. Det slog honom att förhållandet mellan dessa

---

[2] Georg Henrik von Wright *Mitt liv som jag minns det*, Söderströms 2001, s. 169.

begrepp föreföll vara detsamma som mellan de modala begreppen “möjlig”, “omöjlig” och “nödvändig”. Utgående från denna idé började han arbeta på ett formellt system. Som så ofta i logikens historia fanns det andra som ungenför samtidigt började arbeta på att formalisera modallogiken.

För den som behärskar formell satslogik (SL) är steget till formell modal satslogik (MSL) inte långt. Man kan betrakta MSL som en utvidgning av SL genom att man inför två nya symboler som står för möjlighet och nödvändighet. Vanligen använder man ◊ som tecken för möjlighet och □ som tecken för nödvändighet. (På engelska kallas de ofta diamond respektive box). Alla andra symboler är desamma som i SL.

Genom att placera någondera av dessa symboler framför en formel i SL får vi en formel i MSL. Enklare kan det inte bli. Här är några exempel. Det modala uttrycket är skrivet kursivt. Det ersätts med en modal symbol.

1. Sats: Det är *möjligt* att det blir regn i morgon.
Formalisering: Vi låter r = Det blir regn i morgon. Vi får den modala formeln: ◊**r**.
2. Sats: Om det inte blir regn i morgon så är det *möjligt* att vi spelar fotboll.
Formalisering: s = Vi spelar fotboll. Vi får formeln **¬r → ◊s** .
3. Sats: Om det blir regn i morgon så är det *omöjligt* att spela fotboll.
Formalisering: **r → ¬◊s.**
4. Sats: Om en operation **kan** rädda patientens liv så *måste* den utföras.
Formalisering: o = en operation räddar patientens liv, u = den utförs. ◊**o → □u**.

Att två satser a och b är logiskt oförenliga betyder att det är omöjligt att båda är sanna. Detta uttrycks i formeln **¬◊(a & b)**. Teodicéproblemet kan lätt uttryckas i MSL. Vi har g = Gud är god, a = Gud är allsmäktig, s = Gud har skapat världen och o = världen är full av lidande. Vi får formeln **¬◊(g & a & s & o)**. Att en formel är nödvändigt sann, dvs logiskt sann eller giltig kan vi nu uttrycka formellt.

Lagen om det uteslutna tredje blir **□(a v ¬a)**.
Kontradiktionslagen blir **¬◊(a & ¬a)**.
Att modus ponens är giltig kan vi skriva som **□{[(a → b) & a] → b}**.

Vilka är sanningsvillkoren för □ ◊? Detta är en semantisk fråga. Logikerna har utvecklat en semantik för FML som vid ett första påseende kan verka egendomlig. Vad menar vi när vi säger att det är logiskt nödvändigt att ett påstående är sant. Att alla trianglar har tre sidor är inte bara sant utan nödvändigtvis sant. Logikerna tolkar det så att det är sant oberoende av hur världen i övrigt ser ut, bl.a. oberoende av vilka naturlagar som gäller. Låt oss i likhet med Einstein införa Gud för att förklara begrepp. Att något är nödvändigt sant innebär då att hur Gud än skapat världen så är det ändå sant. Gud kunde ha skapat vilka naturlagar som helst, men inte ens han kunde ha skapat en värld där trianglar inte har tre sidor. Att något är möjligt kan förklaras på liknande sätt. Att det är möjligt innebär att Gud kunde ha skapat världen så att det vore sant. Det är möjligt att en människa har tre ögon om Gud kunde ha skapat en sådan värld.

Denna semantik kallas *möjlig värld*-semantik. Den innebär att vi tänker oss att det finns en ofantlig mängd möjliga världar. Den verkliga världen, det universum vi lever i är en av dessa. Logikerna kallar vår värld den aktuella världen. Alla de andra världarna skiljer sig mer eller mindre från vår värld och från alla andra världar. Utgående från detta definieras nödvändigt och möjligt på följande sätt.

Def. 1: **Någonting är nödvändigt omm det är sant i varje möjlig värld.**

Def. 2: **Någonting är möjligt omm det är sant i minst en möjlig värld.**

Denna semantik kan anpassas till olika slag av möjliga världar. När vi t.ex. talar om kausal nödvändighet och möjlighet så beaktar vi endast de kausalt möjliga världarna. Dessa är alla de världar med samma naturlagar som våra som Gud kunde ha skapat. Alla de möjliga världar i vilka naturlagarna är desamma som i vår värld utgör sålunda mängden av kausalt möjliga världar. (Filosofisk anmärkning: Om man tror på total kausal determinism så finns det bara en sådan värld.) De kausalt möjliga världarna skiljer sig från varandra när det gäller allt som inte bestäms av naturlagarna, t.ex. allt som beror på slumpen och på människans fria vilja. Jag skriver denna bok av fri vilja. Alltså finns det en stor mängd kausalt möjliga världar i vilka jag existerar men inte skriver denna bok.

Mängden av möjliga världar kan ytterligare inskränkas genom att man begränsar sig till de praktiskt möjliga världarna. I det praktiska livet är det dessa världar som är intressanta. Denna mängd visar det spelrum som vi har att med vår fria vilja forma världen.

Var existerar dessa möjliga världar? Finns de i verkligheten? Inom fysikens filosofi finns det en debatt om huruvida det finns andra universa än vårt. Det finns t.ex. tolkningar av kvantfysiken som förutsätter oändligt många universa. Det finns också tolkningar av universums uppkomst som säger att vårt universum bara är ett av en stor mängd. Idén om många universa är urgammal. Man finner en variant av den i en antik filosofskola som kallas stoicism. Enligt denna förintas världen med jämna mellanrum av en väldig världsbrand, men uppstår pånytt ur askan. En känd 1700-talsfysiker vid namn Boscovic förde fram en teori om att ett stort antal universa kan existera jämsides. Materien är, enligt teorin, så beskaffad att materian i ett universum kan genomtränga materian i ett annat utan att någon påverkan sker.

Det logiska begreppet möjlig värld har ingenting med dessa spekulationer att göra. Det är ett helt abstrakt, tänkt begrepp. De möjliga världarna existerar inte i något fysikaliskt rum utan endast i det logiska rummet. De är tänkta storheter som är avsedda att klargöra den logiska meningen hos de modala begreppen. I stället för ordet "värld" kunde man använda "omständighet". Något är nödvändigt omm det är sant under alla tänkbara omständigheter. Något är möjligt omm det finns åtminstone en tänkbar omständighet under vilken det är sant. Men det låter mer spännande att tala om världar än omständigheter. Och vem vet. Kanske finns det faktiskt andra världar tidigare än, utanför eller parallellt med vårt universum. Men stämmer det i så fall faktiskt att det som är nödvändigt faktiskt är sant i alla sådana världar. I den aktuella världen är det sant att alla trianglar har tre sidor, men är detta sant i alla universa (om det finns några)? Kan vi alls veta något om vad som är sant i andra universa? Kanske finns det ett universum i vilket allting är runt. Där finns inga trianglar. Där finns inte ens ordet triangel. Då kan det väl inte vara sant där att alla trianglar har tre sidor? Om läsaren är road av dylika funderingar kan han/hon försöka besvara frågan.

Logikerna har visat att det finns en stor mängd olika möjliga system för MSL. Alla system och deras relationer till varandra har utforskats i detalj.[3] Detta är ren grundforskning. Lika litet som SL helt motsvarar intuitiv logik gör MSL det. Det system som mest liknar intuitiv logik kallas S5.

En fördel med S5 är att en del av de anomalier som den materiella implikationen medför försvinner i S 5. Här är två exempel på sådana anomalier. Med SV- tabellmetoden kan man lätt visa att dessa två regler är giltiga i SL.

$$\frac{b}{a \to b} \qquad \frac{\neg a}{a \to b}$$

Låt a = månen är en ost, och b = Åbo är en stad. Enligt SL kan vi av satsen "Åbo är en stad" dra slutsatsen "Om månen är en ost så är Åbo en stad". Enligt den andra regeln kan vi av "Månen är inte en ost" sluta oss till "Om månen är en ost så är Åbo en stad". Det finns många liknande exempel i SL. Att de är giltiga beror på att "om så" i SL formaliseras med → och denna i sin tur definieras genom en SV-tabell. Men det intuitiva "om så" motsvaras de facto inte av någon SV-tabell. Det är inte sanningsfunktionellt. Den modala

[3] En översikt av alla system finner man i G. E. Huges och M. J. Cresswell *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge 1996.

formaliseringen av "om så" □(a → b) är inte sanningsfunktionell och därmed stämmer den bättre med intuitiv logik. Därför stämmer MSL bättre med intuitiv logik än SL.

7.3. EN BEVISMETOD FÖR S5.

Hur bevisar vi giltighet och andra logiska egenskaper i MSL? Metoden med SV-tabeller kan inte användas. De modala symbolerna är inte sanningsfunktionella. Däremot kan trädmetoden, som presenterades i avsnitt 7.?, lätt utökas så att den kan tillämpas på S5. Det enda tillägg vi behöver är regler för hur vi hanterar □, ◊, ¬□ och ¬◊. I modallogiken måste vi beakta att formler kan vara sanna i andra världar fast de inte är sanna i den aktuella världen. Eller att de kan vara sanna i den aktuella världen men inte i andra världar. Vi kan sålunda flytta formler från en värld till en annan. Att vi flyttar till en annan värld markerar vi med ett vågrätt streck streck över den gren i trädet där vi befinner oss. Reglerna innebär att vi tillämpar def. 1 och def. 2 ovan. Vi får då följande.

1. En formel som inte är modaliserad kan inte flyttas till någon annan värld alls. Den kan bara användas i den aktuella världen.
2. En formel av typ □(A) är sann i alla världar. Därför får vi skriva A i vilken värld som helst.
3. En formel av typ ¬◊(A) innebär att A omöjligen kan vara sann. Den är alltså falsk i varje möjlig värld. Vi får därför skriva ¬ A i vilken värld som helst.
4. En formel av typ ◊(A) innebär att A är sann i minst en möjlig värld. Vi får därför skriva A i en och endast en möjlig värld, men det måste vara en värld där vi inte tidigare skrivit in någon formel.
5. En formel av typ ¬□(A) betyder att det inte är nödvändigt att A är sann. Alltså är A falsk i minst en möjlig värld. Alltså får man skriva in ¬A i någon möjlig värld där man inte tidigare har skrivit någon formel..

7.4. DEONTISK SATSLOGIK (DSL).

Den deontiska logiken kan räknas som ett delområde av modal logik, eller som en logik för sig (sui generis). Med deontisk logik menas logiken hos begreppen "tillåtet", "förbjudet" och "obligatoriskt". Också för dessa finns det en mängd synonyma termer. I stället för att säga att "det är tillåtet att yttra sig" kan vi säga "man får yttra sig", i stället för obligatoriskt kan vi använda "måste", "det är en plikt att" eller liknande uttryck.

Georg Henrik von Wright brukar betraktas som grundaren av den formella deontiska logiken (DSL). Om hur han kom in på dessa tankar berättar han i sin självbiografi:

> "I en informell diskussion med några vänner i Cambridge, troligen vid jultiden 1950, slogs jag av följande tanke: De tre normativa begreppen "tillåtet", "förbjudet" och "obligatoriskt" förefaller att förhålla sig till varandra enligt samma mönster som "möjligt", "omöjligt" och "nödvändigt" eller "någon", "ingen" och "alla". De normativa begreppen lyder uppenbarligen logiska regler, något som många inflytelserika tänkare betvivlat eller rentav förnekat....En ny med modal- och kvantlogiken besläktad gren av logiken hade fötts. På Broads förslag kallade jag den *deontisk* logik, efter det grekiska ordet för plikt, *deon*. Jag skrev som så ofta under dessa år i all hast ihop en uppsats och skickade den till Mind...Jag anade att uppsatsen "Deontic Logic"skulle väcka uppmärksamhet, men kunde inte föreställa mig att den skulle bli mitt livs lyckokast som logiker."[4]

Som så ofta i den formella logikens historia fanns det andra som ungenfär samtidigt oberoende av varandra börjat arbeta med samma idé. von Wright ger dem fullt erkännande i sina memoarer.[5]

Deontiska resonemang är vanliga. Här är några exempel.

[4] G.H. von Wright not 88 s. 171-172.
[5] G.H. von Wright not 88 s. 173.

1) *Om firma X bygger ett köpcentrum i område Y så förstörs stora kulturvärden. Men stora kulturvärden får inte förstöras. Därför får firma X inte bygga ett köpcentrum i område Y.*

Den första premissen är ett sakpåstående av om-så typ. Den andra premissen och slutsatsen är deontiska påståenden. De uttrycker värderingar om vad man får och inte får göra. Detta argument kan inte formaliseras i SL eller MSL, men nog i DSL. Det är för övrigt giltigt i DSL. Men är det giltigt enligt intuitiv logik? Vad säger läsarens logiska intuition? (Man bör alltid hålla i minnet att det är skillnad mellan att ett argument är giltigt i ett formellt system och att det är sunt. Vidare bör man minnas att ett argument kan vara giltigt respektive sunt i ett system, men ogiltigt och osunt i ett annat. Att ett argument är sunt i ett system är ännu inget bevis. Slutligen bör man komma ihåg att det är skillnad mellan formell logik och intuitiv logik. Formell logik ger inga "slutgiltiga sanningar".)

2) *Om man gör abort så dödar man ett foster. Om man dödar ett foster så dödar man en människa. Det är förbjudet att döda en människa. Alltså är det inte tillåtet att man gör abort.*

3) *Om eleven inte gjort läxan får läraren straffa honom. Det är möjligt att eleven inte gjort läxan. Alltså är det möjligt att läraren får straffa honom.* I detta argument ingår såväl det deontiska *får* som det modala *möjligt*.

När det gällde modala uttryck skiljde vi mellan praktisk, kausal och logisk nivå. Inom deontisk logik finner man liknande skillnader. Det finns olika typer av tillåtelse. Men nu är frågorna mer invecklade. Vi bör t.ex. skilja mellan juridisk tillåtelse och moralisk tillåtelse. Något som är moraliskt fel kan vara juridiskt tillåtet och tvärtom. Därtill kommer att det ofta råder oenighet i moraliska frågor. Dylika frågor spelar dock ingen roll i deontisk logik eftersom den inte försöker ge svar på vad som är och inte är tillåtet utan endast på de logiska egenskaperna hos begreppen "tillåtet" och "förbjudet". Man lär sig m.a.o. ingenting om vadsom är rätt och orätt genom att studera formell deontisk logik. Det enda man lär sig är att fundera över när ett deontiskt argument är giltigt.

Vokabulären i DSL.

I DSL ingår MSL (och därmed förstås också SL). Vokabulären innehåller alltså alla de tecken som ingår i MSL. Det enda nya är två tecken P och O. P står för tillåtet (engelska permissible) och O för obligatorisk (engelska obligatory). Vi utläser P som "det är tillåtet att" och O som "det är obligatoriskt att". Vi kan också helt enkelt säga "man får" och "man måste". Låt a = Pelle kysser Pia. Då blir Pa = Det är tillåtet att Pelle kysser Pia, och Oa = Det är Pelles skyldighet att kyssa Pia.

Grammatiken för DSL.

Grammatiken är densamma som för MSL förutom att vi behöver regler för hur P och O används. Reglerna för dem är precis desamma som för □ och ◊. P och O placeras framför en formel. Vi kan ha en negation framför -P, -O eller efter O-, P-.

Semantiken för DSL.

Semantiken bygger på samma möjlig värld-tanke som MSL. Men deontiska utsagor handlar inte om vad som är utan om vad vi skulle vilja. Att något är förbjudet, moraliskt eller juridiskt, hindrar oss inte att göra det. De flesta bryter åtminstone någon gång mot åtminstone någon lag eller vad vi uppfattar som rätt. Deontiska utsagor säger något om hur vi vill att en idealisk värld ser ut. I en juridiskt idealisk värld bryter ingen någonsin mot en juridisk lag. I en moraliskt ideal värld handlar alla moraliskt.

I semantiken för DSL väljer man ut en speciell klass av möjliga världar nämligen klassen av i*deala möjliga världar*. I dessa världar är människorna perfekta. De beter sig så som vi skulle önska men inte alltid gör. Vi får därför följande definitioner av sanning i DSL.

Något är tillåtet omm det finns minst en ideal värld där det är sant.

Något är obligatoriskt omm det är sant i varje ideal värld.

Tanken är alltså att en formel Pa är sann omm det finns åtminstone en ideal värld där a är sann, och Oa är sann omm a är sann i varje ideal värld. Pa är sålunda falsk om det inte finns någon ideal värld där a är sann, och Oa är falsk om det finns åtminstone en ideal värld där a är falsk. Det är moraliskt tillåtet för Pelle att kyssa Pia omm det finns åtminstone en moraliskt ideal värld där han faktiskt kysser henne. Det är inte moraliskt tillåtet omm det inte finns en enda moraliskt ideal värld där han faktiskt kysser henne. Det är hans moraliska skyldighet att kyssa henne omm Pelles motsvarighet i varje moraliskt ideal värld kysser Pias motsvarighet.

Dessa definitioner är inte till någon hjälp när vi vill avgöra om en handling är moralisk eller inte. Om den frågan har logiken inget att säga. Däremot kan definitionerna hjälpa oss att tolka vad det innebär att något är tillåtet respektive obligatoriskt. Men framför allt ger de en möjlighet att anpassa trädmetoden till DSL så att vi därmed får en bevismetod för formell deontisk satslogik.

Trädmetoden i DSL.

Alla regler för trädmetoden i MSL gäller också i DSL. Men vad gör vi med deontiserade formler, dvs med formler som styrs av O eller P. Märk att en formel av typen P(a &b) är deontiserad, men inte Pa & Pb. På den senare formeln måste vi först tillämpa regeln för &. Först därefter kan vi tillämpa regeln för P.

Vi behöver fyra regler. En för vart och ett av fallen P(A) (där A står får vilken formel som helst), -P(A), O(A) och -O(A). Låt oss tänka logiskt! Vi tar O(A) som modellexempel. Om något är plikt så behöver det inte vara sant i vår värld. Vi lever ju sannerligen inte i en ideal värld! Vi får därför aldrig skriva A i vår värld. Alltså: när en formel styrs av en modal operator måste vi alltid flytta till en ideal värld och skriva formeln där. Enligt definitionen är A sann i varje ideal värld. Vi får därför skriva in A i varje ideal värld. För att markera att vi går till en ideal värld skriver vi ett dubbelsträck === . Om vi behöver gå till flera ideala världar markerar vi sträcken med siffror, ==== 1, ==== 2 etc.

Vad gör vi med P(A)? Enligt definitionen betyder detta att A är sann i minst en ideal värld. Den kan vara sann i flera, men ingenting garanterar detta. Vi får därför skriva in A i högst en ideal värld.

-O(A) betyder att A är falsk i minst en ideal värld. Vi får alltså skriva in -A i en ideal värld, men inte i flera.

-P(A) betyder att A inte är tillåten, dvs falsk i alla ideala världar. Vi får skriva -A i vilken som helst ideal värld.

Som exempel formaliserar vi och testar giltigheten hos de modala argument som inledde detta kapitel.

Exempel 1. Lexikon: f = Firma X bygger ett köpcentrum i område Y. s = Stora kulturvärden förstörs. När vi formaliserar får vi följande regel.

$$\begin{array}{c}\Box(f \rightarrow s)\\ \underline{-Ps}\\ -Pf\end{array}$$

Bevis: Vi testar om det finns något motexempel mot regeln. Vi antar, som alltid, att premisserna är sanna sanna och slutsatsen falsk. Vi får --Pf vilket är detsamma som Pf. De modaliserade formlerna tvingar oss att flytta till en ideal värld. Först använder vi alltid en regel som tillåter flyttning till endast en ideal värld. (1) Vi använder därför regeln för Pf och flyttar f till den ideala världen ==1. (2) -Ps innebär att vi får flytta -s till varje ideal värld, alltså också till värld ==1. (3) Formeln □(f → s) innebär att vi får flytta f → s till vilken möjlig värld som helst, alltså också till ==1. (4) Slutligen spjälker vi upp f → s i dess två sanningsmöjligheter och får två grenar i sanningsträdet. I den vänstra grenen finner vi både f och -f, en motsägelse alltså. I den högra grenen finner vi -s och s, också en motsägelse. (5) Vi markerar att det finns motsägelser med ett x i vardera grenen. Det kan sålunda inte existera några motexempel. Q.E.D.

======1
1 f
2 -s
3 f → s
4 -f s
5 x x

Exempel 2. Lexikon: a = man gör abort, d = man dödar ett foster, ä = man dödar en människa. Vi får då följande formaliserade regel.

□(a → d)
□(d → ä)
<u>O-ä</u>
-Pa

Bevis: Vi börjar med att anta slutsatsen falsk, dvs anta Pa. De modaliserade formlerna tvingar oss till ideala världar. Först använder vi regeln för Pa och kommer till den ideala världen ===1. O-ä innebär att vi får flytta -ä till vilken ideal värld som helst, alltså också till ===1. De båda modala formlerna får vi flytta till vilken möjlig värld som helst, alltså också till ===1. Sedan spjälker vi upp implikationerna i deras sanningsmöjligheter och söker motsägelser. Vi finner sådana i alla fyra grenar. Regeln är alltså giltig.

=====1
a
-ä
a → d
d → ä
a d
-d ä -d ä
x x x x

Exempel 3. I detta exempel ingår såväl modala som deontiska operatorer. Lexikon: e = Eleven har gjort läxan, l = Läraren straffar honom. Formaliseringen blir:

□(-e → Pl)
<u>◊-e</u>
◊Pl

Bevis: Vi börjar med att neka slutsatsen och får -◊Pl. Detta betyder att Pl är falsk i varje möjlig värld. Vi skriver -Pl. Den andra premissen ◊-e tvingar oss att flytta till en möjlig värld -----1. Vi får, enligt reglerna, ta med oss de båda andra formlerna dit. Vi spjälker upp formeln -e → Pl, söker motsägelser. Sådana finns i vardera grenen. Alltså är regeln giltig.

-------1
-e
-Pl
-e → Pl
e Pl
x x

Dessa tre exempel är giltiga, men självklart finns det långt flere ogiltiga argument än giltiga. Om vi finner minst en gren som inte innehåller någon motsägelse har vi ett motbevis. Då är argumentet ogiltigt i DSL. Det kan förstås ändå vara giltigt i ett mer omfattande formellt system, t.ex. i modal predikatlogik. Även om ett argument inte är giltigt i något formellt deontiskt system kan det ändå vara giltigt enligt intuitiv logik.