10. GÖDELS BEVIS FÖR OFULLSTÄNDIGHET

Kurt Gödel (1906-1978) är en av 1900-talets mest berömda, men kanske också mest missförstådda, logiker. Som människa var denne österrikiske tänkare skygg och misstänksam. Han levde hela sitt liv nära gränsen till sinnessjudom. Han var hypokondriker och led av depressioner. Mot slutet av sitt liv blev han paranoid. Han trodde att någon ville förgifta honom. Därför vägrade han att äta någon annan mat än den som hans hustru tillredde. När hon lades in på sjukhus 1977 dog han snart av undernäring. En av 1900-talets främsta logiker var sålunda i själva verket en ytterst irrationell människa. Av detta kan vi dra slutsatsen att logik inte nödvändigtvis gör en människa klok! (Är detta resonemang giltigt? Induktivt eller deduktivt?)

Gödel är främst känd för två *ofullständighetsteorem*. Bevisen för dessa framlade han år 1931. Det första säger att i varje formellt system som uppfyller vissa villkor existerar en sats som varken kan bevisas eller motbevisas. Det andra säger att om ett sådant system är konsistent så kan detta inte bevisas inom ramen för systemet själv.[1]

Dessa teorem verkar, vid första påseende, inte särskilt viktiga. Inom den formella logiken är de ändå av stor betydelse rent principiellt därför att de sätter gränser för vad man kan åstadkomma med formella system. Man bör dock varna för att överdriva deras betydelse. Den som inte känner till formell logik tror lätt att teoremen uttrycker något slags djupa sanningar. De handlar uttryckligen om formella system, inte om vanliga språk och intuitiv logik.

I en mycket läst populärvetenskaplig bok höjer Tor Nørretranders Gödels första ofullständighetsteorem till skyarna som en epokgörande upptäckt. Han skriver bl.a.: "Det var ett bevis som totalt förändrade matematikernas och logikernas situation, ett bevis som tvang forskarna att inse att de aldrig kommer att kunna bevisa allt här i världen, att människans föreställning om världen i all evighet kommer att innehålla insikter som inte kan bevisas...Gödels teorem har nämligen fastställt gränserna för all kunskap och därmed i viss mening gett oss den enda visshet vi någonsin kan få...Drömmen om visshet hade krossats."[2]

Gödel publicerade sitt resultat på tyska 1931.[3] Vid den tiden hade den formella logiken redan existerat i ca 50 år. Det vid den tiden bäst kända formella systemet fanns i boken *Principia Mathematica* (tre band 1910-13) och hade utarbetats av Bertrand Russell och A.N. Whitehead. Vid den tiden fanns det också ett annat formellt system, Zermelo-Fraenkels axiomatiska mängdlära. Logikerna och matematikerna antog att dessa system var *fullständiga* (complete). Att ett formellt system är fullständigt innebär att varje formel i systemet antingen kan bevisas eller motbevisas. Ingen formel inom systemet blir så att säga hängande i luften så att varken formeln själv eller dess negation kan härledas.

Satslogiken är ett exempel på ett fullständigt formellt system. För varje formel som kan skrivas med hjälp av de symboler, som finns i systemet, gäller att man med en bevismetod inom systemet, t.ex. tabellmetoden, alltid kan avgöra om den är sann eller inte inom systemet. Det kan inte existera någon formel inom systemet som inte är avgörbar med tabellmetoden.

---

[1] Raymond Smullyan beskriver i boken *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel* (1987), Oxford UP 2000, den typ av logiska problem som Gödels bevis handlar om på ett relativt lättbegripligt sätt. För en tekniskt mer fullständig behandling se t.ex. Raymond Smullyan "Gödel´s Incompleteness Theorems" ss. 72-89 i Lou Goble (ed) *The blackwell Guide to Philosophical Logic.* Blackwell Publishers 2001

[2] Tor Nørretranders *Märk världen. En bok om vetenskap och intuition.* Utkom på danska 1991. Första svenska utgåvan 1993, Bonnierpoket 1999. Citat på s. 62.

[3] En översättning till engelska med titeln "On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and related Systems" finns i Davies, M. (ed) *The Undecidable*, Raven Press, New York 1964.

Gödels ofullständighetsteorem gäller sålunda inte för enkla system såsom SL eller andra system som uppfyller villkoren för s.k. boolsk algebra. När Nørretranders, i citatet ovan, säger att drömmen om visshet krossats så har han fel när det gäller system som uppfyller villkoren för boolska algebror. Han har också fel när det gäller PL, d.v.s. första ordningens predikatlogik med identitet. PL måste utvidgas med de anturliga talen för att Gödels bevis skall kunna genomföras. Självklart gäller Gödels teorem inte för naturliga språk. Strikta bevis av den typ som finns i formell logik kan inte existera i naturliga språk.

Vad säger då Gödels ofullständighetsteorem? Det säger att i varje formellt system, som är tillräckligt komplicerat för att innehålla de naturliga talen, kan man skriva en sann formel som inte kan bevisas inom systemet. Låt oss kalla ett sådant system ett G-system.

Principen i beviset kan förklaras på följande sätt. Ett system är fullständigt omm varje sann formel i systemet kan bevisas, och varje falsk formel motbevisas, med de bevismetoder som finns inom systemet. Om man alltså kan hitta en sats S, som är sann inom varje G-system, *men inte kan bevisas inom systemet*, så har man bevisat att varje G-system är ofullständigt.

Gödel hittade på följande procedur. Antag ett system G. Antag vidare att varje formel inom G tilldelas ett tal. Detta tal fungerar som ett namn på formeln. Talet gör det möjligt att nämna formeln utan att skriva ut formeln själv. Sådana tal kallas gödeltal. Eftersom det finns oändligt många tal så kan varje formel få ett eget gödeltal. Med hjälp av dessa tal kan man referera till vilken formel som helst i systemet. Sådana tal kan konstrueras t.ex. på följande sätt:

För ¬ skriver vi 12, för & 122, för v 1222, för → 12222 och för ↔ 122222. För de övriga symbolerna skriver vi enligt följande: (13,) 1333, E 13333, osv. För variablerna skriver vi x 14, y 144, z 1444 osv. Med hjälp av sådana tal kan man sedan skriva varje formel.

Gödel kom på tanken att man med hjälp av talen kan konstruera formler i varje G-system som *refererar till sig själva*. Han konstruerade sedan en formel F som säger att ett visst gödeltal n är namnet på en formel som inte är bevisbar inom systemet.

F säger alltså, uttryckt i vanligt språk: *Det finns en formel vid namn n i G som inte kan bevisas med metoderna inom G.*

Och här kommer nu det fina i kråksången. *Talet n är i själva verket namnet på formeln F.* F säger alltså att en formel med talet n inte är bevisbar, och n är i själva verket namnet på F. Man kan populärt uttrycka det så att formeln säger om sig själv: *Jag är inte bevisbar inom G.*

Gödels bevis bygger alltså på *självreferens.* I SL och PL kan man inte skriva formler som refererar till sig själva. Därför drabbas de inte av beviset. Men genom att införa de naturliga talen, och användea dessa som namn på formler, så kan man skriva formler som refererar till vilken eller vilka andra formler som helst.

Vi har alltså en formel i systemet G som säger att den inte kan bevisas inom G. Men hur skall vi kunna bevisa att F måste vara sann i G om den inte kan bevisas inom G? Om vi skulle vara tvugna att hålla oss inom G så kan vi självklart inte bevisa att F är sann inom G. F själv säger ju att den inte är bevisbar inom G. Om vi med bevismetoderna inoim G skulle kunna bevisa att F de fakto är sann så skulle vi få en motsägelse. Vi skulle inom G bevisa en formel som säger att den inte är bevisbar inom G. Om beviset stämmer så kan det inte stämma! Om F bevisligen är bevisbar så är den inte bevisbar. Alltså kan F inte bevisas inom G.

Men hur kan vi då vara säkra på att F faktiskt är sann? Vi måste gå utanför G, till ett system som är större än G och därmed ger fler bevismöjligheter. Detta större system är i själva verket det naturliga språket och den klassiska logiken. Resonemanget är följande.

Enligt klassisk logik är F antingen sann eller falsk. Antag att F faktiskt är sann. Då är den inte bevisbar inom G därför att detta är vad den säger. Antag sedan att F är falsk. Då är den bevisbar inom G. (Den säger att den inte är bevisbar. Detta stämmer inte om den är falsk. Alltså är den bevisbar.) Härav följer att vi har två och endast två möjligheter. Om vi med säkerhet kan eliminera någon av dessa så måste den andra med säkerhet vara sann.

1) F är sann, men inte bevisbar inom G.
2) F är falsk, men bevisbar inom G.

Vilket av alternativen är korrekt? Alternativ 2) är de facto omöjligt. Varför? Om alternativ 2) stämmer så innebär det att vi inom G kan bevisa en formel som är falsk. Varför är detta omöjligt? Det skulle väcka enorm uppståndelse bland logikerna, och rasera grunden för den formella logiken, om man faktiskt kunde härleda en falsk formel inom ett systema av typ G. Grundidén med formell logik har, ända sedan Gottlob Frege lade grunden till den, varit att utveckla system inom vilket det är omöjligt att härleda falska formler. Axiomen och bevismetoderna inom G är valda så att det skall vara omöjligt att härleda falska formler. (Ett formellt system som gör det möjligt att bevisa falska satser är förstås värdelöst).

Alternativ 2) är därmed uteslutet. Alltså måste alternativ 1) stämma. *Därmed har vi bevisat att det i varje G-system finns åtminstone en formel, som är sann, men som inte kan bevisas inom systemet. Följaktligen är varje G-system ofullständigt.* Q.E.D.

Hur viktigt är då detta bevis? Vilken betydelse har det? Jag citerar Nørretranders populära bok ännu en gång: "Detta bevis, inte utan grund betecknat som det djupsinnigaste som någonsin har utförts, rör gränserna för den mänskliga kunskapens visshet, gränserna för vad vi kan bevisa. Det är ett bevis för att vi inte kan bevisa allt. Även om vi är säkra på att det är riktigt."[4]

Vi har just bevisat Gödels teorem (eller, mer exakt, klargjort strukturen hos beviset).Teoremet innebär följaktligen ingen allvarlig begränsning för den mänskliga förmågan att bevisa teorem av varierande slag. Men vi har bevisat teoremet inte inom systemet utan inom ett större system. I denna mening finns det inga gränser för våra möjligheter att bevisa. För varje system kan vi alltid, vid behov, skapa ett större system i vilket vi kan betrakta det mindre systemet.

Nørretranders har uppenbarligen grovt missförstått bevisets kunskapsteoretiska betydelse. Det är mycket vanligt att den som inte förstår formell logik tror att den innehåller djupsinniga filosofiska sanningar. Endast genom att själv bekanta sig med den kan förstå vad den egentligen handlar om. Gödels teorem innebär alltså inte någon allvarlig begränsning av vår förmåga att bevisa påståenden av varierande slag. Det sätter endast gränser för vad man kan bevisa med formella, mekaniska metoder. För mänsklig intelligens och kreativitet sätter det inga gränser. Det bevisar tvärtom den intuitiva logikens överlägsenhet över alla formella metoder.

Men vi bevisade inte teoremet inifrån G utan utifrån ett större system. Låt oss kalla detta U. En liknelse kan här vara till hjälp. Antag att vi sätter handklovar och fotbojor på en man och låser in honom i en cell. Vi förbjuder honom att använda några som helst knep. Sedan uppmanar vi honom att ta sig ut. Det är förstås omöjligt. När vi är inne i ett G-system är vi i en liknande situation. Vi har fullständigt rigida regler för vad man får och inte får göra inom systemet. Detta är själva idéen med formella system. All kreativitet är förbjuden. Gödels bevis är ett exempel på kreativitet, men det är frågan om keativitet inom U, inte inom G.

---

[4] Se not 93 s. 62.

Men anta att mannen i cellen får använda hela sin kreativitet. Alla knep som tänkas kan är tillåtna för att smita ut ur cellen. En s.k. utbrytarkung klarar uppgiften med glans. Han använder sig av ett system analogt med U. I själva verket är U det naturliga språket och logiken i U är den intuitiva logiken. Detta system har inga exakta regler, inga skarpa gränser. Det förändras hela tiden. Delar av systemet anpassas för nya situationer. *Därför kan ett bevis av gödel-typ aldrig konstrueras för systemet U.*

Men kan man då överhuvudtaget bevisa något alls inom U? Naturligtvis. Vi har just bevisat (skissat beviset) för Gödels teorem. Det finns en enorm mängd bevis av alla tänkbara slag inom U. Men det finns förstås en avgörande skillnad mellan bevis inom ett G-system och U. Reglerna inom G är en gång för alla givna, mekaniska. Detta gäller inte inom U. Härav får man dock inte dra slutsatsen att bevis inom U skulle vara mindre pålitliga. Man kan överhuvudtaget inte bevisa något generellt om bevismetoderna inom U. Det finns alla tänkbara typer av bevis från rigida matematiska bevis till bevis inom empiriska vetenskaper till bevis vid domstolar till vardagliga bevis. Alla dessa har sina uppgifter och fungerar bra inom sitt område. De ger den grad av visshet som vi behöver i det sammanhanget. Men i det avseendet skiljer de sig inte från G-system.

Gödels teorem innebär sålunda inga begränsningar, varken för människans förmåga att nå kunskap eller för vår förmåga att bevisa olika typer av sanningar. Det innebär däremot att det finns gränser för vad man kan göra med vissa typer av formella system.

Det finns ett annat viktigt teorem, som anger gränser för vad man kan göra med formella system. Det bevisades av logikern Alonzo Church 1936. Teoremet innebär att det inte finns någon mekanisk bevisprocedur med hjälp av vilken varje formel i PL kan avgöras. Man kan alltså inte programmera en maskin, som för varje formel inom PL, som vi matar in i den, avgör om den är giltig eller ogiltig. Om formeln är giltig kommer maskinen visserligen att bevisa detta. Men för en del ogiltiga formler inom PL gäller att maskinen aldrig kommer till en punkt där den kan säga att formeln är ogiltig.

Gödels teorem säger sålunda att alla mer komplicerade formella system innehåller minst en sann formel som inte kan bevisas inom systemet. Churchs teorem säger att för PL (och följaktligen för alla system som innehåller PL) gäller att de inte kan fullständigt mekaniseras. Det finns inom systemet falska formler som inte kan bevisas vara falska med bevismetoderna inom systemet.

Logikern Richard Jeffrey skriver: “The theorems of Gödel and Church are of the first importance, both mathematically and philosophically. In particular, on the philosophical side, Gödel´s theorem dealt the deathblow to the theory which identifies mathematical truth with provability, and Church´s theorem established that logic can never be fully mechanized.”[5]

Slutligen bör det betonas att, hur filosofiskt-teoretiskt intressanta dessa teorem än är, så har de mycket liten praktisk betydelse.

[5] Richard Jeffrey *Formal Logic: Its scope and Limits.* McGraw-Hill, 1967 s. 169.